

DOSSIER

TECHNIQUES DE L'INGÉNIEUR

l'expertise technique et scientifique de référence

a310

Calcul des structures, Plaques minces élastiques

Par :
Jean COURBON

Ce dossier fait partie de la base documentaire
[Archives] Mathématiques pour l'ingénieur
dans le thème
et dans l'univers Archives

Document délivré le
Pour le compte

Pour toute question :
Service Relations Clients • Éditions Techniques de l'Ingénieur • 249, rue de Crimée
75019 Paris – France

par mail : infos.clients@teching.com ou au téléphone : 00 33 (0)1 53 35 20 20

Plaques minces élastiques

par **Jean COURBON**

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées

Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées

1. Équations générales de la flexion des plaques minces	A 310 - 2
1,1 Définitions et hypothèses de base	— 2
1,2 Étude de la flexion pure	— 2
1,3 Flexion des plaques chargées transversalement (équation de Lagrange)	— 3
1,4 Étude des plaques minces au moyen du théorème des travaux virtuels	— 5
1,5 Méthode de l'énergie	— 7
1,6 Flexion cylindrique des plaques minces	— 7
2. Plaques rectangulaires	— 8
2,1 Plaques rectangulaires simplement appuyées. Solution de Navier	— 8
2,2 Application de la méthode de l'énergie aux plaques rectangulaires simplement appuyées	— 8
2,3 Plaques rectangulaires simplement appuyées sur deux côtés opposés (solution de Maurice Lévy)	— 9
2,4 Quelques résultats concernant les plaques rectangulaires uniformément chargées	— 12
3. Plaques circulaires	A 311 - 1
3,1 Plaques circulaires symétriquement chargées	— 1
3,2 Plaques circulaires soumises à une densité de charge quelconque	— 2
4. Voilement des plaques minces	— 5
4,1 Voilement d'une plaque uniformément comprimée	— 5
4,2 Voilement d'une plaque uniformément comprimée suivant la direction Ox	— 7
4,3 Voilement d'une plaque uniformément comprimée suivant deux directions orthogonales	— 9
4,4 Voilement d'une plaque soumise à un effort de compression variable dirigé suivant Ox	— 11
Index bibliographique	— 11

Les notations sont définies au début de la présente rubrique Calcul des structures.

1 Équations générales de la flexion des plaques minces

1.1 DÉFINITIONS ET HYPOTHÈSES DE BASE

Les axes $Oxyz$ étant rectangulaires, une *plaque mince* est un solide limité par deux plans parallèles voisins d'équations $z = \pm 1/2 h$, et par une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à Oz . Le plan Oxy est le **plan moyen** (ou feuillet moyen) de la plaque. L'épaisseur h de la plaque est supposée petite devant les dimensions mesurées dans le plan moyen.

La minceur de la plaque justifie les **hypothèses simplificatrices** suivantes.

- Les forces extérieures [densité superficielle $p(x, y)$ ou densité linéaire $P(s)$ le long d'une courbe (Γ) du plan moyen d'abscisse curviligne s] peuvent être considérées comme appliquées au plan moyen. Les densités $p(x, y)$ et $P(s)$ sont supposées normales au plan moyen, et comptées positivement sur l'axe Oz' opposé à Oz .

- La contrainte normale σ_3 sur tout élément parallèle au plan moyen peut être négligée.

- Le plan moyen ne subit aucune contraction ni extension lors de la flexion de la plaque. Le déplacement d'un point du plan moyen se réduit donc à sa seule composante normale $w(x, y)$ comptée positivement sur Oz .

- Une section de la plaque normale à son plan moyen reste plane après déformation. Le déplacement d'un point (x, y, z) de la plaque a donc pour composantes :

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w = w(x, y) \quad (1)$$

1.2 ÉTUDE DE LA FLEXION PURE

1.21 Relations entre les contraintes et les déformations.

Les formules (1) donnant les composantes du déplacement montrent que les seules composantes non nulles du tenseur déformation sont ε_1 , ε_2 et γ_3 . Nous obtenons donc, en désignant par E le module d'Young et par ν le coefficient de Poisson, et en tenant compte de ce que σ_3 est nul :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1) \\ \gamma_3 &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1+\nu}{E} \tau_3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Donc, en résolvant par rapport à σ_1 , σ_2 et τ_3 :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_2 &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_3 &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

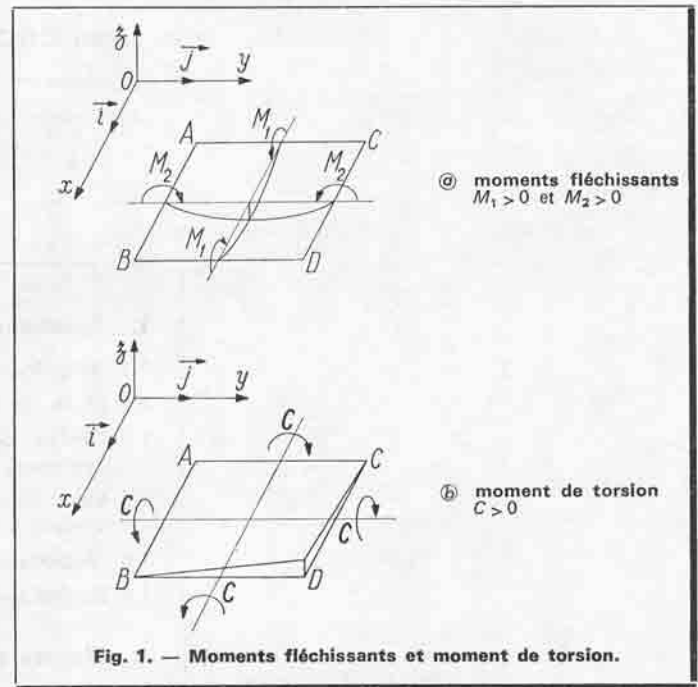


Fig. 1. — Moments fléchissants et moment de torsion.

Les moments fléchissants M_1 et M_2 , et le moment de torsion C en un point (x, y) du plan moyen ont pour valeurs :

$$M_1 = - \int_{-1/2h}^{1/2h} \sigma_1 z \, dz, \quad M_2 = - \int_{-1/2h}^{1/2h} \sigma_2 z \, dz, \quad C = - \int_{-1/2h}^{1/2h} \tau_3 z \, dz$$

En remplaçant σ_1 , σ_2 et τ_3 par leurs valeurs (3) et en définissant la rigidité à la flexion de la plaque par :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{EI}{1-\nu^2} \quad \left(\text{avec } I = \frac{1}{12} h^3 \right) \quad (4)$$

nous obtenons les relations fondamentales :

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_2 &= D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ C &= D (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

entre les composantes du tenseur flexion M et les composantes du tenseur courbure K :

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & C \\ C & M_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Les composantes M_1 , M_2 et C définissent la *contrainte généralisée*. Si l'on considère (fig. 1) un rectangle élémentaire dont les côtés $AB = dx$ et $AC = dy$ sont parallèles aux axes Ox et Oy de vecteurs

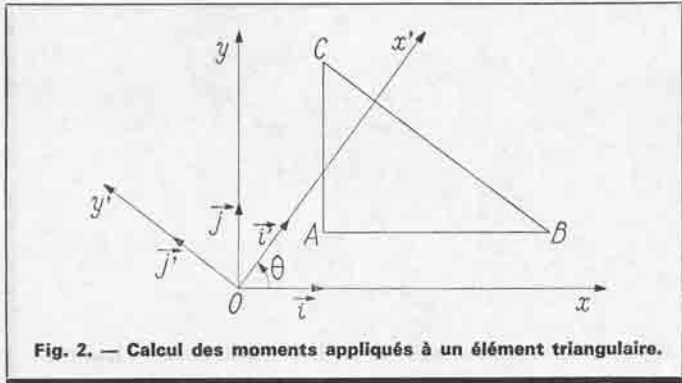


Fig. 2. — Calcul des moments appliqués à un élément triangulaire.

unités $\vec{i}$ et $\vec{j}$, ce rectangle est soumis le long du côté AB aux couples $-M_2 \vec{i} dx$ et $C \vec{j} dx$, et le long du côté AC aux couples $-C \vec{i} dy$ et $M_1 \vec{j} dy$.

Les contraintes σ_1 , σ_2 et τ_3 se déduisent des composantes M_1 , M_2 et C de la contrainte généralisée au moyen des formules suivantes, qui découlent immédiatement des relations (3) et (5) :

$$\sigma_1 = -\frac{M_1 z}{I}, \quad \sigma_2 = -\frac{M_2 z}{I}, \quad \tau_3 = -\frac{Cz}{I}$$

$I = 1/12 h^3$ désignant l'inertie d'une section de largeur unité de la plaque.

Les composantes $\partial^2 w / \partial x^2$, $\partial^2 w / \partial y^2$ et $2 \partial^2 w / \partial x \partial y$ définissent la *déformation généralisée*; $\partial^2 w / \partial x^2$ est la courbure normale du plan moyen déformé suivant la direction de l'axe Ox ; $\partial^2 w / \partial y^2$ est la courbure normale du plan moyen déformé suivant la direction de l'axe Oy ; enfin $\partial^2 w / \partial x \partial y$ est la torsion géodésique relative aux directions des axes.

Les formules (2) permettent de calculer les composantes de la déformation réelle en fonction des composantes de la déformation généralisée.

1,22 Moment fléchissant et moment de torsion dans une section quelconque. Directions principales.

Pour trouver le moment fléchissant $M(\theta)$ et le couple de torsion $C(\theta)$ supportés par unité de longueur d'une section de la plaque dont la normale fait l'angle θ avec Ox , il suffit (fig. 2) d'écrire l'équilibre des moments appliqués à un élément triangulaire ABC ($BC = ds$, $AB = ds \sin \theta$, $AC = ds \cos \theta$).

Nous obtenons ainsi l'équation vectorielle :

$$C(\theta) \vec{i}' + M(\theta) \vec{j}' = (-C \vec{i} + M_1 \vec{j}) \cos \theta + (-M_2 \vec{i} + C \vec{j}) \sin \theta$$

équivalente aux deux équations scalaires :

$$\left. \begin{aligned} M(\theta) &= M_1 \cos^2 \theta + M_2 \sin^2 \theta + 2 C \sin \theta \cos \theta \\ C(\theta) &= (M_1 - M_2) \sin \theta \cos \theta - C(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Notons que : $C = -C(0) = -C(\pi) = C(\pi/2) = C(3\pi/2)$.

Il existe deux directions principales rectangulaires pour lesquelles le moment de torsion $C(\theta)$ est nul ; elles sont définies par :

$$\tan 2\theta = \frac{2C}{M_1 - M_2}$$

Les moments fléchissants principaux $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ relatifs aux directions principales sont les racines de l'équation :

$$\mathcal{M}^2 - (M_1 + M_2)\mathcal{M} + (M_1 M_2 - C^2) = 0$$

La troisième équation (5) montre que les directions principales du tenseur flexion sont aussi les directions principales du tenseur

courbure ; à ces directions correspondent donc les courbures principales du plan moyen déformé.

1,23 Potentiel élastique d'une plaque soumise à la flexion pure.

Le potentiel élastique (ou *énergie de déformation*) W de la plaque d'aire S a pour valeur, les composantes de la contrainte généralisée étant (M_1, M_2, C) et celles de la déformation généralisée étant $(\partial^2 w / \partial x^2, \partial^2 w / \partial y^2, 2 \partial^2 w / \partial x \partial y)$:

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \left(M_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 C \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy \quad (8)$$

Les relations (5) permettent d'écrire le potentiel sous la forme :

$$W = \frac{1}{2} D \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (9)$$

qui ne dépend que des invariants du tenseur courbure, ou sous la forme :

$$W = \frac{1}{2D(1-\nu^2)} \iint_S [(M_1 + M_2)^2 - 2(1+\nu)(M_1 M_2 - C^2)] dx dy$$

qui ne dépend que des invariants $M_1 + M_2$ et $M_1 M_2 - C^2$ du tenseur flexion.

1,3 FLEXION DES PLAQUES CHARGÉES TRANSVERSALEMENT

1,31 Efforts tranchants.

Admettons que les relations précédentes, établies dans le cas de la flexion pure, sont encore valables dans le cas de la flexion avec effort tranchant. Cette hypothèse, qui revient à négliger les déformations dues à l'effort tranchant, est justifiée par la minceur de la plaque.

Désignons par T_1 l'effort tranchant par unité de longueur dans une section normale à Ox , et par T_2 l'effort tranchant par unité de longueur dans une section normale à Oy . Les efforts tranchants T_1 et T_2 sont comptés positivement sur Oz . Il résulte alors de l'équilibre de l'élément ABC de la figure 2 qu'une section de la plaque, dont la normale orientée fait l'angle θ avec Ox , supporte par unité de longueur un effort tranchant :

$$T(\theta) = T_1 \cos \theta + T_2 \sin \theta \quad (10)$$

Connaissant T_1 et T_2 , on calculera les contraintes de cisaillement maximales en adoptant la loi de distribution parabolique des contraintes de cisaillement dans les sections rectangulaires, donc :

$$(\tau_2)_{\max} = \frac{3}{2} \left(\frac{T_1}{h} \right), \quad (\tau_1)_{\max} = \frac{3}{2} \left(\frac{T_2}{h} \right)$$

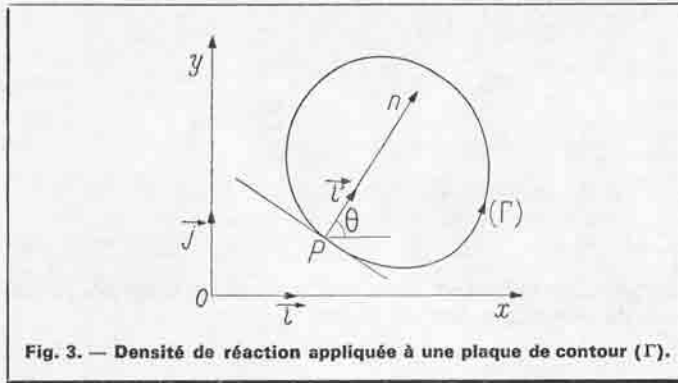


Fig. 3. — Densité de réaction appliquée à une plaque de contour (Γ).

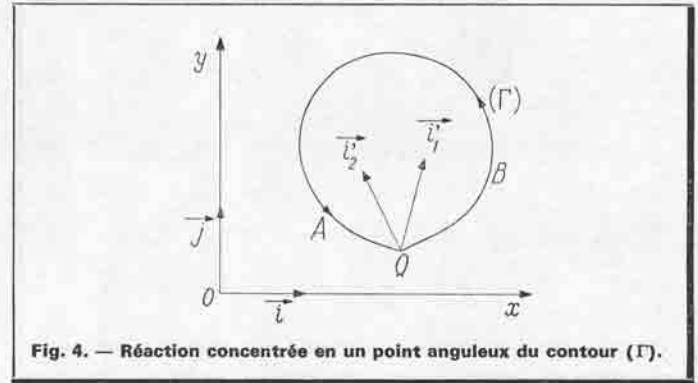


Fig. 4. — Réaction concentrée en un point anguleux du contour (Γ).

1.32 Équations d'équilibre. Équation de Lagrange.

Écrivons l'équilibre d'un élément ABCD de côtés $AB = dx$ et $AC = dy$. Soient $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ les vecteurs unités des axes Oxyz. Les forces et les couples appliqués à l'élément comprennent :

- une force $-p \, dx \, dy \, \vec{k}$ appliquée au centre de l'élément ;
- une force $\vec{F}_{AB}$ et un couple $\vec{\Gamma}_{AB}$ appliqués au milieu du côté AB :

$$\vec{F}_{AB} = T_2 \, dx \, \vec{k}, \quad \vec{\Gamma}_{AB} = -M_2 \, dx \, \vec{i} + C \, dx \, \vec{j}$$

- une force $\vec{F}_{AC}$ et un couple $\vec{\Gamma}_{AC}$ appliqués au milieu du côté AC :

$$\vec{F}_{AC} = T_1 \, dy \, \vec{k}, \quad \vec{\Gamma}_{AC} = -C \, dy \, \vec{i} + M_1 \, dy \, \vec{j}$$

- une force $\vec{F}_{CD}$ et un couple $\vec{\Gamma}_{CD}$ appliqués au milieu du côté CD :

$$\vec{F}_{CD} = -\left(T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial y} \, dy\right) dx \, \vec{k}$$

$$\vec{\Gamma}_{CD} = \left(M_2 + \frac{\partial M_2}{\partial y} \, dy\right) dx \, \vec{i} - \left(C + \frac{\partial C}{\partial y} \, dy\right) dx \, \vec{j}$$

- une force $\vec{F}_{BD}$ et un couple $\vec{\Gamma}_{BD}$ appliqués au milieu du côté BD :

$$\vec{F}_{BD} = -\left(T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial x} \, dx\right) dy \, \vec{k}$$

$$\vec{\Gamma}_{BD} = \left(C + \frac{\partial C}{\partial x} \, dx\right) dy \, \vec{i} - \left(M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial x} \, dx\right) dy \, \vec{j}$$

Les équations d'équilibre de l'élément se réduisent aux trois équations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} &= -p(x, y) \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} &= T_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial x} &= T_2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

En éliminant T_1 et T_2 entre ces trois équations, nous trouvons :

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} = -p(x, y)$$

puis, en remplaçant M_1 , M_2 et C par leurs expressions (5), nous obtenons l'équation de Lagrange, dans laquelle Δ désigne le laplacien $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$:

$$D \Delta \Delta w = D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -p(x, y) \quad (12)$$

Si l'on porte les expressions (5) de M_1 , M_2 et C dans les deux dernières équations d'équilibre (11), on trouve les expressions

suivantes de T_1 et T_2 :

$$T_1 = D \frac{\partial (\Delta w)}{\partial x}, \quad T_2 = D \frac{\partial (\Delta w)}{\partial y} \quad (13)$$

1.33 Conditions aux limites.

Le déplacement w doit satisfaire à l'équation de Lagrange (12) et aux conditions aux limites sur le contour (Γ) de la plaque (fig. 3).

Un élément de section verticale du contour de la plaque est défini par la normale intérieure Pn au contour, de vecteur unité $\vec{i}'$ faisant l'angle $\theta = (\vec{i}, \vec{i}')$ avec le vecteur unité $\vec{i}$ de l'axe Ox. Cet élément de bordure suppose un effort tranchant $T(\theta)$, un moment fléchissant $M(\theta)$ et un moment de torsion $C(\theta)$ donnés par les formules (10) et (7), et, pendant la flexion, tourne autour de la tangente au contour d'un angle :

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta \quad (14)$$

La densité de réaction d'appui $R(\theta)$, comptée positivement sur Oz, se décompose en une densité de réaction d'appui $T(\theta)$ due à l'effort tranchant, et en une densité de réaction d'appui due au moment de torsion. Soit s l'abscisse curviligne du contour comptée positivement dans le sens trigonométrique ; le couple de torsion $C(\theta) \, ds$ appliqué à un élément $PP' = ds$ du contour est équivalent à une réaction $C(\theta)$ appliquée en P et à une réaction $-C(\theta)$ appliquée en P' ; en faisant la somme de ces réactions pour l'ensemble des éléments du contour, on voit que le moment de torsion le long du contour résulte d'une densité de réaction $\partial C(\theta)/\partial s$. La densité de réaction $R(\theta)$ est donc donnée par le formule de Kirchhoff :

$$R(\theta) = T(\theta) + \frac{\partial C(\theta)}{\partial s} \quad (15)$$

Le raisonnement précédent montre qu'en un point anguleux Q du contour il existe une réaction concentrée R_Q :

$$R_Q = C(\theta_2) - C(\theta_1) \quad (16)$$

θ_1 désignant l'angle $(\vec{i}, \vec{i}'_1)$ du vecteur normal $\vec{i}'_1$ en Q à l'arc AQ, et θ_2 l'angle $(\vec{i}, \vec{i}'_2)$ du vecteur normal $\vec{i}'_2$ en Q à l'arc BQ du contour (fig. 4).

Les conditions aux limites sur le contour le plus souvent rencontrées en pratique sont :

- bord encastré : $w = 0, \quad \partial w / \partial n = 0$
- bord simplement appuyé : $w = 0, \quad M(\theta) = 0$
- bord libre : $M(\theta) = 0, \quad R(\theta) = 0$

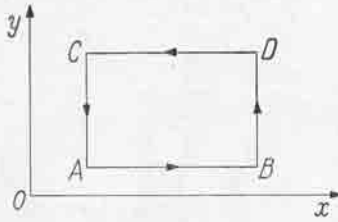


Fig. 5. — Conditions aux limites sur le contour d'une plaque rectangulaire.

Donnons, à titre d'exemple, les valeurs de $\partial w / \partial n$, $M(\theta)$ et $R(\theta)$ en tout point du contour d'une plaque rectangulaire ABCD dont les côtés sont parallèles aux axes Ox et Oy (fig. 5).

— Le long du côté AC ($\theta = 0$) :

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad M(\theta) = M_1 = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$R(\theta) = T_1 + \frac{\partial C}{\partial y} = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]$$

— Le long du côté AB ($\theta = \frac{\pi}{2}$) :

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad M(\theta) = M_2 = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$R(\theta) = T_2 + \frac{\partial C}{\partial x} = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]$$

— Le long du côté BD ($\theta = \pi$) :

$$\frac{\partial w}{\partial n} = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad M(\theta) = M_1 = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$R(\theta) = -T_1 - \frac{\partial C}{\partial y} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]$$

— Le long du côté CD ($\theta = \frac{3\pi}{2}$) :

$$\frac{\partial w}{\partial n} = -\frac{\partial w}{\partial y}, \quad M(\theta) = M_2 = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$R(\theta) = -T_2 - \frac{\partial C}{\partial x} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]$$

Enfin, la formule (16) montre que les réactions concentrées aux angles de la plaque ont pour valeurs :

$$R_A = C \left(\frac{\pi}{2} \right) - C(0) = 2 C_A, \quad R_B = C(\pi) - C \left(\frac{\pi}{2} \right) = -2 C_B$$

$$R_D = C \left(\frac{3\pi}{2} \right) - C(\pi) = 2 C_D, \quad R_C = C(0) - C \left(\frac{3\pi}{2} \right) = -2 C_C$$

C_A , C_B , C_C et C_D désignant les valeurs de la composante C du tenseur flexion aux angles de la plaque (§ 1.22).

1.34 Réduction de l'équation de Lagrange à deux équations de Laplace.

Soit $M = M_1 + M_2$ le premier invariant du tenseur flexion ; en ajoutant membre à membre les deux premières relations (5), on voit que w est une intégrale de l'équation de Laplace :

$$\Delta w = \frac{M}{D(1 + \nu)}$$

Pour trouver un renseignement, consulter la table alphabétique.

En reportant la valeur précédente de Δw dans l'équation de Lagrange (12), on voit que M est une intégrale de l'équation de Laplace :

$$\Delta M = -(1 + \nu) p(x, y)$$

Donc, toutes les fois que l'on connaît les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions M et w sur le contour de la plaque, l'intégration de l'équation de Lagrange peut être remplacée par l'intégration de l'équation de Laplace donnant M , puis par l'intégration de l'équation de Laplace donnant w .

Il en est ainsi dans le cas d'une plaque polygonale simplement appuyée sur ses bords ; il est, en effet, immédiat de voir que les fonctions M et w doivent s'annuler sur le contour de la plaque.

1.35 Limites d'application de la théorie des plaques minces.

Nous avons fait l'hypothèse que le plan moyen déformé ne subissait ni contraction ni extension (§ 1.1). Cette hypothèse ne peut être rigoureusement satisfaite que lorsque la surface du plan moyen déformé est applicable sur un plan, donc développable. Il en est bien ainsi dans le cas de la flexion cylindrique des plaques, et dans ce cas l'application de la théorie exige seulement que l'épaisseur de la plaque soit petite devant ses dimensions transversales.

Mais si la plaque fléchit de sorte que le plan moyen déformé soit une surface non développable, les courbes tracées sur le plan moyen subissent des variations de longueur pendant la flexion. Dans ce cas, la théorie des plaques minces n'est justifiée que lorsque les dilatations du plan moyen sont petites devant les dilatations maximales produites par la flexion. Il est aisé de vérifier qu'il en est bien ainsi lorsque le déplacement w est petit devant l'épaisseur h de la plaque.

Les conditions précédentes sont toujours vérifiées pour les dalles en béton armé ou en béton précontraint utilisées dans les constructions. Par contre, elles ne le sont qu'imparfaitement pour les tôles des bordés des coques des navires ; ces tôles travaillent alors à la fois en flexion et en membranes.

1.4 ÉTUDE DES PLAQUES MINCES AU MOYEN DU THÉORÈME DES TRAVAUX VIRTUELS

Soit une plaque mince d'aire S et de contour (Γ) , dont les bords sont encastés, simplement appuyés ou libres. La charge transversale $p(x, y)$ produit le déplacement $w(x, y)$. Donnons à w une variation virtuelle $\delta w = \bar{w}$ compatible avec les conditions aux limites ; le travail virtuel des réactions au contour étant nul, le théorème des travaux virtuels se traduit par l'équation :

$$\delta V + \delta W = 0$$

δV étant la variation de l'énergie potentielle de la charge :

$$\delta V = \iint_S p \bar{w} \, dS$$

et δW la variation du *potentiel élastique* de la plaque :

$$\delta W = \iint_S \left(M_1 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + M_2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + 2C \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \right) dS$$

Nous allons transformer l'expression de δW en utilisant la formule de Riemann :

$$\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dS = - \int_{\Gamma} (P \cos \theta + Q \sin \theta) ds$$

dans laquelle l'intégrale curviligne est prise dans le sens trigonométrique, et $(\cos \theta, \sin \theta)$ sont les cosinus directeurs de la normale intérieure à (Γ) .

On établit ainsi les relations :

$$\begin{aligned} \iint_S M_1 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} dS &= \iint_S \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} \bar{w} dS \\ &\quad - \int_{\Gamma} \left(M_1 \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \frac{\partial M_1}{\partial x} \bar{w} \right) \cos \theta ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_S M_2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} dS &= \iint_S \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} \bar{w} dS \\ &\quad - \int_{\Gamma} \left(M_2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial M_2}{\partial y} \bar{w} \right) \sin \theta ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_S C \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} dS &= \iint_S \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \bar{w} dS \\ &\quad - \int_{\Gamma} \left(C \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \cos \theta - \frac{\partial C}{\partial x} \bar{w} \sin \theta \right) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_S C \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} dS &= \iint_S \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \bar{w} dS \\ &\quad - \int_{\Gamma} \left(C \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial C}{\partial y} \bar{w} \cos \theta \right) ds \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \delta W &= \iint_S \left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} \right) \bar{w} dS \\ &\quad - \int_{\Gamma} \left[(M_1 \cos \theta + C \sin \theta) \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + (M_2 \sin \theta + C \cos \theta) \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right] ds \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \right) \cos \theta + \left(\frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial x} \right) \sin \theta \right] \bar{w} ds \end{aligned}$$

Compte tenu des relations (5), l'intégrale double qui figure dans δW a pour expression :

$$\delta W_1 = \iint_S (D \Delta \Delta w) \bar{w} dS$$

Remplaçons dans la première intégrale curviligne qui figure dans δW les dérivées $\partial \bar{w} / \partial x$ et $\partial \bar{w} / \partial y$ par leurs expressions en fonction de la dérivée normale $\partial \bar{w} / \partial n$ et de la dérivée $\partial \bar{w} / \partial s$ suivant la tangente orientée au contour (Γ) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \cos \theta + \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} \sin \theta \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \sin \theta - \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} \cos \theta \end{aligned}$$

nous trouvons, compte tenu des relations (7) :

$$\delta W_2 = - \int_{\Gamma} \left[M(\theta) \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} + C(\theta) \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} \right] ds$$

Et puisque :

$$\int_{\Gamma} C(\theta) \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} ds + \int_{\Gamma} \frac{\partial C(\theta)}{\partial s} \bar{w} ds = \int_{\Gamma} \frac{\partial [C(\theta) \bar{w}]}{\partial s} ds = 0$$

nous pouvons écrire :

$$\delta W_2 = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial C(\theta)}{\partial s} \bar{w} - M(\theta) \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \right] ds$$

Enfin, la seconde intégrale curviligne s'écrit, compte tenu des deux dernières équations d'équilibre (11) et de la relation (10) :

$$\delta W_3 = \int_{\Gamma} (T_1 \cos \theta + T_2 \sin \theta) \bar{w} ds = \int_{\Gamma} T(\theta) \bar{w} ds$$

Finalement, nous obtenons l'expression suivante de δW :

$$\delta W = \iint_S (D \Delta \Delta w) \bar{w} dS + \int_{\Gamma} \left[\left(T(\theta) + \frac{\partial C(\theta)}{\partial s} \right) \bar{w} - M(\theta) \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \right] ds$$

Le théorème des travaux virtuels se traduit donc par les deux équations :

$$\left. \begin{aligned} \iint_S (D \Delta \Delta w + p) \bar{w} dS &= 0 \\ \int_{\Gamma} \left[\left(T(\theta) + \frac{\partial C(\theta)}{\partial s} \right) \bar{w} - M(\theta) \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \right] ds &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

La première équation (17) montre que, la variation virtuelle $\bar{w}$ étant arbitraire dans S , w doit vérifier l'équation de Lagrange (12) :

$$D \Delta \Delta w + p = 0$$

Moyennant les hypothèses faites sur le contour, la seconde équation (17) est toujours vérifiée, car nous avons :

$$\begin{aligned} - \text{sur un bord encastré :} & \quad \bar{w} = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} = 0 \\ - \text{sur un bord simplement appuyé :} & \quad \bar{w} = 0, \quad M(\theta) = 0 \\ - \text{sur un bord libre :} & \quad M(\theta) = 0, \quad T(\theta) + \frac{\partial C(\theta)}{\partial s} = 0 \end{aligned}$$

Inversement, la seconde équation (17) nous donnerait les conditions aux limites, si nous ne les connaissions pas. Par exemple, sur un bord libre, $\bar{w}$ et $\partial \bar{w} / \partial n$ étant arbitraires, nous retrouvons les conditions aux limites :

$$M(\theta) = 0, \quad T(\theta) + \partial C(\theta) / \partial s = R(\theta) = 0$$

données précédemment (§ 1,33).

Nous retiendrons que, quelles que soient les conditions suivantes : bord encastré, bord simplement appuyé ou bord libre, la variation virtuelle de l'énergie de déformation, pour un déplacement virtuel $\bar{w}$ compatible avec les liaisons au contour, a pour valeur :

$$\delta W = \iint_S (D \Delta \Delta w) \bar{w} dS \quad (18)$$

Si l'on prend $\bar{w} = w$, on voit que $\delta W = 2W$; nous obtenons ainsi l'expression suivante de l'énergie de déformation :

$$W = \frac{1}{2} D \iint_S w \Delta \Delta w dS \quad (19)$$

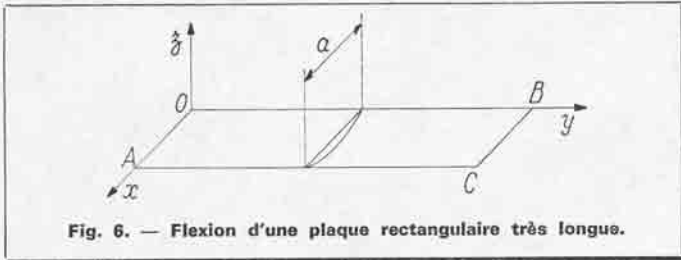


Fig. 6. — Flexion d'une plaque rectangulaire très longue.

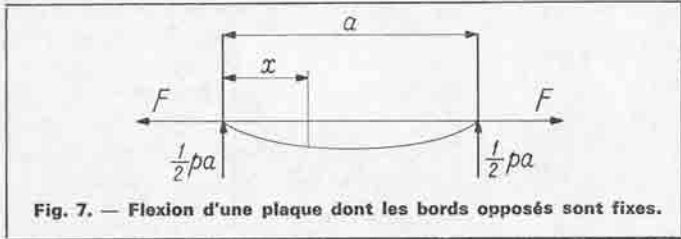


Fig. 7. — Flexion d'une plaque dont les bords opposés sont fixes.

Compte tenu de l'équation de Lagrange (12), l'expression précédente peut également s'écrire sous la forme de Clapeyron :

$$W = -\frac{1}{2} \iint_S p w \, dS$$

1,5 MÉTHODE DE L'ÉNERGIE

Il est possible, au lieu d'intégrer l'équation de Lagrange, de déterminer le déplacement $w(x, y)$ d'une plaque soumise à la charge $p(x, y)$, en écrivant que l'énergie totale U est minimale pour la position d'équilibre. L'énergie totale U est la somme de l'énergie de déformation W et de l'énergie potentielle de la charge $p(x, y)$:

$$U = \frac{1}{2} D \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + \frac{2 p w}{D} \right\} dS \quad (20)$$

Le problème de la flexion d'une plaque revient donc à chercher la fonction $w(x, y)$ qui vérifie les conditions aux limites et qui rend minimale l'intégrale (20).

On peut utiliser la méthode de l'énergie pour trouver une expression approchée de $w(x, y)$. Supposons connues n fonctions $w_i(x, y)$ vérifiant les conditions aux limites ; on peut représenter approximativement $w(x, y)$ par une combinaison linéaire de ces fonctions :

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i w_i(x, y)$$

En substituant l'expression précédente, qui vérifie les conditions aux limites, dans l'intégrale U , nous obtenons, après intégration, U sous la forme d'un polynôme du second degré des coefficients a_i . Les valeurs des coefficients qui rendent l'intégrale U minimale vérifient donc les n équations linéaires :

$$\frac{\partial U}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial U}{\partial a_n} = 0$$

Par exemple, pour calculer une plaque rectangulaire encastrée le long de ses côtés $x=0$, $x=a$, $y=0$ et $y=b$, on peut adopter l'expression :

$$w(x, y) = x^2 y^2 (x-a)^2 (y-b)^2 (a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2)$$

Lorsque les fonctions $w_i(x, y)$ sont en nombre infini, et qu'une série de fonctions $\sum a_i w_i(x, y)$ permet de représenter toute fonction

vérifiant les conditions aux limites, la méthode précédente fournit la solution exacte sous la forme d'une série de fonctions $w_i(x, y)$ (cf § 2,2).

1,6 FLEXION CYLINDRIQUE DES PLAQUES MINCES

1,61 Équations générales.

Considérons une plaque rectangulaire très longue, dont les petits côtés sont parallèles à Ox (fig. 6) ; cette plaque est soumise à une densité de charge $p(x)$ ne dépendant pas de y . Nous supposons que les conditions d'appui le long des grands côtés sont quelconques, mais indépendantes de y . Nous pouvons admettre qu'à une distance suffisante des petits côtés le plan moyen déformé peut être confondu avec un cylindre de génératrices parallèles à Oy , autrement dit que w n'est fonction que de x . Dans ces conditions, les équations générales de la théorie des plaques minces se réduisent aux équations :

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= D \frac{d^2 w}{dx^2}, & M_2 &= \nu M_1, & C &= 0 \\ T_1 &= \frac{dM_1}{dx}, & T_2 &= \nu T_1, & \frac{dT_1}{dx} &= -p \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

La première équation (21) permet de calculer w connaissant les conditions aux limites le long des grands côtés $x=0$ et $x=a$.

1,62 Plaques dont les bords opposés sont fixes.

Bornons-nous au cas où la plaque est simplement appuyée sur les bords $x=0$ et $x=a$, et où la densité de charge p est constante.

Il s'agit, en pratique, de plaques constituées par des tôles minces fixées sur une ossature rigide.

Puisque les bords $x=0$ et $x=a$ ne peuvent se rapprocher durant la flexion, il se développe le long de ces bords une densité de réaction horizontale F inconnue (fig. 7). La première équation (21) s'écrit alors :

$$D \frac{d^2 w}{dx^2} - Fw = \frac{1}{2} p x (a-x)$$

L'intégrale de cette équation différentielle, qui satisfait aux conditions aux limites $w(0)=0$ et $w(a)=0$, est :

$$w(x) = -\frac{p a^4}{16 D u^4} \left\{ \frac{\operatorname{ch}[u(1-2x/a)]}{\operatorname{ch} u} - 1 \right\} - \frac{p a^2 x(a-x)}{8 D u^2}$$

u étant défini par :

$$u = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{F}{D}}$$

Pour déterminer F , on écrit que l'allongement dû à la déformation w est égal à l'allongement produit par la contrainte de traction uniforme $\sigma = F/h$:

$$\frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \frac{F a (1-\nu^2)}{h E} = \frac{h^2 u^2}{3 a}$$

On obtient ainsi une équation transcendante qui permet de calculer u , donc F .

Le fait de fixer les bords de la plaque diminue les contraintes normales, car une partie de la charge est supportée par la plaque se comportant comme une membrane funiculaire.

Les problèmes de plaques à bords fixes se rencontrent en construction navale (tôles des bordés des navires).

2 Plaques rectangulaires

2.1 PLAQUES RECTANGULAIRES SIMPLEMENT APPUYÉES. SOLUTION DE NAVIER

Considérons une plaque rectangulaire, simplement appuyée sur ses bords $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ et $y = b$, soumise à une densité de charge $p(x, y)$ (fig. 8). Il est immédiat de vérifier que la série double de sinus :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (22)$$

satisfait aux conditions aux limites. Il suffit donc de déterminer les coefficients $B_{m,n}$ de façon que cette série soit une intégrale de l'équation de Lagrange (12).

Pour cela, développons $p(x, y)$ en série double de sinus :

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Cette série dont les coefficients ont pour valeurs :

$$A_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (23)$$

est absolument et uniformément convergente dans le domaine ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$) et a pour somme $p(x, y)$ si les conditions suffisantes suivantes sont vérifiées :

- $p(x, y)$ est nul sur le contour de la plaque ;
- m et n étant deux entiers relatifs choisis de façon que le point $(x + ma, y + nb)$ appartienne au domaine ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$), la fonction $\mathfrak{P}(x, y)$ définie dans tout le plan par la relation :

$$\mathfrak{P}(x, y) = (-1)^{m+n} p(x + ma, y + nb)$$

est continue, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre quatre.

En reportant les séries qui donnent $w(x, y)$ et $p(x, y)$ dans l'équation de Lagrange (12), on trouve les coefficients $B_{m,n}$. On obtient ainsi la solution :

$$w(x, y) = -\frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{m,n}}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (24)$$

Cette série est a fortiori absolument et uniformément convergente, puisque ses coefficients sont plus petits en valeur absolue que les coefficients $A_{m,n}$. Elle ne converge pas très rapidement. Mais les séries qui représentent M_1 , M_2 , C , T_1 et T_2 , par exemple :

$$M_1 = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \frac{\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$M_2 = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \frac{\frac{n^2}{b^2} + \nu \frac{m^2}{a^2}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

convergent encore plus lentement. Il faut donc toujours préférer la solution de Maurice Lévy donnée ci-après (§ 2.3), qui donne $w(x, y)$ sous la

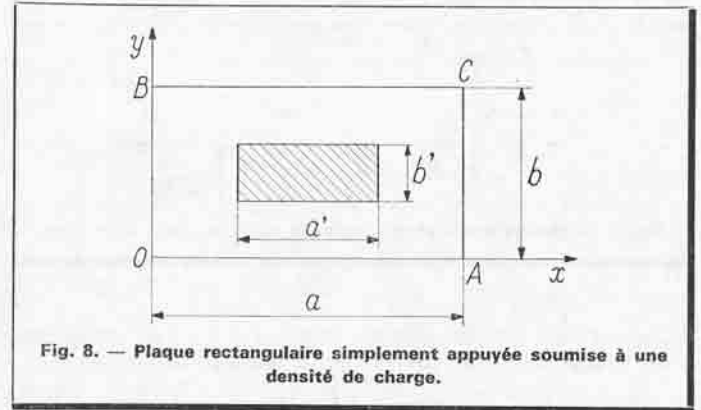


Fig. 8. — Plaque rectangulaire simplement appuyée soumise à une densité de charge.

forme d'une série simple très rapidement convergente.

Il peut arriver que les séries qui représentent les fonctions w , M_1 , M_2 , C , T_1 et T_2 soient absolument et uniformément convergentes sans que la série dont les coefficients sont définis par la formule (23) le soit. Dans ce cas, la somme de la série (24) est encore le déplacement $w(x, y)$, car il est possible de modifier infiniment peu la fonction $p(x, y)$ pour qu'elle satisfasse aux conditions suffisantes indiquées précédemment, sans modifier pour cela l'équilibre de la plaque.

Ce cas se rencontre notamment pour une charge de densité constante p répartie sur un rectangle de côtés a' et b' parallèles aux côtés de la plaque, et dont le centre est confondu avec celui de la plaque (fig. 8) ; en effet, dans ce cas :

$$A_{m,n} = \begin{cases} (-1)^{[(m+n)/2]+1} \frac{16p}{\pi^2 mn} \sin \frac{m\pi a'}{2a} \sin \frac{n\pi b'}{2b} & \text{si } m \text{ et } n \\ & \text{sont impairs} \\ 0 & \text{si } m \text{ ou } n \text{ est pair} \end{cases}$$

2.2 APPLICATION DE LA MÉTHODE DE L'ÉNERGIE AUX PLAQUES RECTANGULAIRES SIMPLEMENT APPUYÉES

Nous avons vu que le déplacement $w(x, y)$ pouvait être représenté par la série double de sinus [formule (22)]. En reportant cette valeur dans la formule (9), des calculs simples donnent l'expression du potentiel élastique :

$$W = \frac{1}{8} \pi^4 Dab \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (25)$$

L'énergie potentielle V de la densité de charge $p(x, y)$ a pour valeur :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a \int_0^b p w dx dy \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \end{aligned}$$

soit, compte tenu de la valeur (23) de $A_{m,n}$:

$$V = \frac{1}{4} ab \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} B_{m,n}$$

L'énergie potentielle totale $U = W + V$ dépend des paramètres $B_{m,n}$; nous devons avoir :

$$\frac{\partial U}{\partial B_{m,n}} = \frac{1}{4} ab \left[\pi^4 D B_{m,n} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + A_{m,n} \right]$$

Nous retrouvons ainsi la solution (24).

Appliquons la méthode de l'énergie (§ 1,5) au calcul du déplacement $w(\xi, \eta; x, y)$ produit au point (x, y) par une charge concentrée $P=1$ appliquée au point (ξ, η) ; nous avons dans ce cas :

$$V = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}$$

et nous obtenons la solution :

$w(\xi, \eta; x, y) =$

$$-\frac{4}{\pi^4 Dab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (26)$$

Nous avons bien, conformément au théorème de réciprocité de Maxwell-Betti (cf article *Théorie de l'élasticité*) :

$$w(\xi, \eta; x, y) = w(x, y; \xi, \eta)$$

La fonction $w(\xi, \eta; x, y)$ est une *fonction d'influence* qui permet de calculer le déplacement $w(x, y)$ provoqué par une densité de charge $p(x, y)$ quelconque :

$$w(x, y) = \int_0^a \int_0^b p(\xi, \eta) w(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta$$

Nous pouvons déduire de la série (26) les séries qui représentent M_1 , M_2 , C , T_1 et T_2 au moyen des relations (5) et (13); on constate que ces séries divergent pour $x = \xi$ et $y = \eta$. Les moments fléchissants M_1 et M_2 , le moment de torsion C et les efforts tranchants T_1 et T_2 deviennent donc infinis au droit du point d'application d'une charge concentrée. Ce fait est général, quelles que soient les conditions aux limites sur le bord de la plaque. Il en résulte que, lorsqu'on doit justifier une plaque par un critère de limitation des contraintes, il est nécessaire de remplacer une charge concentrée P par une charge de densité p uniformément répartie sur une petite surface S telle que $P = pS$; il est d'usage de prendre pour S la surface d'un cercle ayant pour centre le point d'application de la charge concentrée et pour diamètre l'épaisseur h de la plaque. De même, on admet que le poids P d'une roue, uniformément réparti sur un rectangle de côtés a' et b' de la face supérieure de la plaque, est équivalent au même poids P uniformément réparti sur un rectangle de côtés $a' + h$ et $b' + h$ du plan moyen.

Pour la table analytique, se reporter à la première page de cet article.

2,3 PLAQUES RECTANGULAIRES SIMPLEMENT APPUYÉES SUR DEUX CÔTÉS OPPOSÉS

2,31 Solution de Maurice Lévy. Formules générales.

Maurice Lévy a étudié les solutions de l'équation de Lagrange (12) qui sont représentées par une série trigonométrique simple :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (27)$$

dont les coefficients sont des fonctions de y . Cette solution, qui vérifie les conditions $w=0$ et $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ pour $x=0$ et $x=a$, convient donc pour une plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses deux côtés opposés $x=0$ et $x=a$. Nous allons voir qu'il est possible de déterminer les fonctions $F_m(y)$ de façon à vérifier des conditions aux limites diverses (bord encastré, bord simplement appuyé ou bord libre) le long des deux autres côtés de la plaque d'équations $y=b_1$ et $y=b_2$.

Développons la densité de charge $p(x, y)$ en série de sinus :

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Cette série dont les coefficients ont pour valeurs :

$$p_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \quad (28)$$

est absolument et uniformément convergente et a pour somme $p(x, y)$ si les conditions suffisantes suivantes sont vérifiées :

- $p(x, y)$ s'annule pour $x=0$ et $x=a$;
- m étant un entier relatif tel que $x+ma$ appartienne à l'intervalle $(0, a)$, la fonction définie, quel que soit x , par :

$$\mathfrak{S}(x, y) = (-1)^m p(x+ma, y)$$

est une fonction de x continue, ainsi que ses deux premières dérivées.

En reportant les séries donnant $w(x, y)$ et $p(x, y)$ dans l'équation de Lagrange (12), on trouve que les fonctions $F_m(y)$ doivent vérifier les équations différentielles linéaires à coefficients constants :

$$F_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} F_m'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} F_m = -\frac{1}{D} p_m(y)$$

L'intégrale générale de l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$F_m(y) = f_m(y) + \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) + \left(C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (29)$$

A_m , B_m , C_m et D_m étant des constantes arbitraires, et $f_m(y)$ une intégrale particulière que l'on peut toujours obtenir par la méthode de la variation des constantes. Dans l'expression (29), nous avons mis en évidence une fonction paire de y dans la première parenthèse, et une fonction impaire de y dans la seconde.

Il est alors possible de déterminer les constantes A_m , B_m , C_m et D_m de façon à vérifier les conditions aux limites (bord encastré, bord simplement appuyé ou bord libre) le long des côtés $y = b_1$ et $y = b_2$. Ces conditions étant homogènes en w , il suffit d'écrire que chaque solution élémentaire :

$$w_m(x, y) = F_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

satisfait aux conditions aux limites envisagées.

Précisons par exemple les **conditions aux limites** le long du côté $y = b_1$.

— Le côté $y = b_1$ est encastré : on trouve, w_m et $\partial w_m / \partial y$ devant être nuls pour $y = b_1$:

$$F_m(b_1) = 0, \quad F'_m(b_1) = 0$$

— Le côté $y = b_1$ est simplement appuyé : on trouve, w_m et $D(\partial^2 w_m / \partial y^2 + \nu \partial^2 w_m / \partial x^2)$ devant être nuls pour $y = b_1$:

$$F_m(b_1) = 0, \quad F''_m(b_1) = 0$$

— Le côté $y = b_1$ est libre : on trouve, $D(\partial^2 w_m / \partial y^2 + \nu \partial^2 w_m / \partial x^2)$ et $D[\partial^3 w_m / \partial y^3 + (2 - \nu) \partial^3 w_m / \partial x^2 \partial y]$ devant être nuls pour $y = b_1$:

$$F''_m(b_1) - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} F(b_1) = 0$$

$$F'''_m(b_1) - (2 - \nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} F'_m(b_1) = 0$$

Les fonctions $F_m(y)$ doivent donc satisfaire à quatre conditions : deux sur chacun des côtés $y = b_1$ et $y = b_2$. Nous obtenons ainsi quatre équations linéaires pour déterminer les quatre constantes A_m , B_m , C_m et D_m .

Connaissant w , les formules (5) donnent M_1 , M_2 et C :

$$M_1 = D \sum_{m=1}^{\infty} \left[\nu F''_m(y) - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} F_m(y) \right] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$M_2 = D \sum_{m=1}^{\infty} \left[F''_m(y) - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} F_m(y) \right] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$C = D(1 - \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} F'_m(y) \cos \frac{m\pi x}{a}$$

puis les deux dernières formules (11) donnent T_1 et T_2 :

$$T_1 = D \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} \left[F''_m(y) - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} F_m(y) \right] \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$T_2 = D \sum_{m=1}^{\infty} \left[F'''_m(y) - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} F'_m(y) \right] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Nous laissons au lecteur le soin de calculer les réactions d'appui réparties le long des côtés et les réactions concentrées aux angles de la plaque.

Remarque : il est toujours possible, sans troubler l'équilibre de la plaque, de modifier infiniment peu la densité de charge $p(x, y)$ finie pour que les conditions suffisantes de représentation de la densité de charge par une série de sinus soient satisfaites.

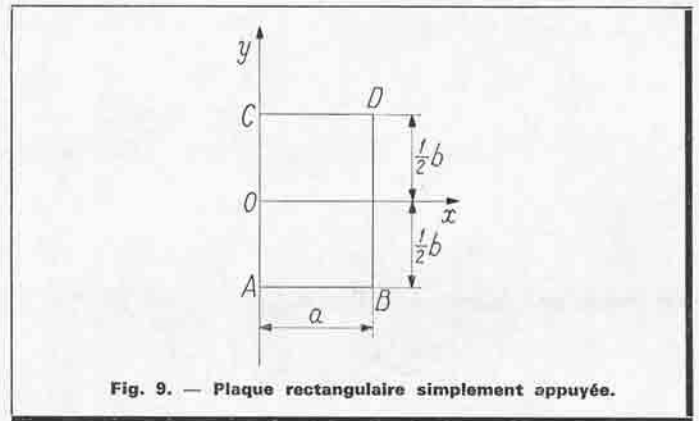


Fig. 9. — Plaque rectangulaire simplement appuyée.

Il en résulte que la série (27) a pour somme $w(x, y)$ lorsqu'elle est convergente. Ce résultat est encore exact dans le cas d'une densité linéaire de charge appliquée le long d'une courbe du plan moyen.

2,32 Plaque simplement appuyée le long de ses côtés.

Choisissons les axes Oxy comme il est indiqué sur la figure 9 ; les côtés de la plaque ont donc pour équations $x = 0$, $x = a$, $y = -\frac{1}{2}b$ et $y = \frac{1}{2}b$.

Nous examinerons deux cas de charge.

2,321 Premier cas : $p(x, y) = p(x)$. — Dans ce cas, les coefficients $p_m(y)$ sont des constantes p_m :

$$p_m = \frac{2}{a} \int_0^a p(x) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \quad (30)$$

La fonction $F_m(y)$ étant paire, la solution $w(x, y)$ est de la forme :

$$w(x, y) = -\frac{a^4}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{m^4} \left(1 + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (31)$$

Les coefficients A_m et B_m , déterminés par les conditions :

$F_m\left(\frac{1}{2}b\right) = 0$ et $F''_m\left(\frac{1}{2}b\right) = 0$, ont pour valeurs :

$$A_m = -\frac{2 + m\lambda \operatorname{th} m\lambda}{2 \operatorname{ch} m\lambda}$$

$$B_m = \frac{1}{2 \operatorname{ch} m\lambda}$$

λ désignant le rapport :

$$\lambda = \frac{\pi b}{2a}$$

En observant que :

$$w_0(x) = -\frac{a^4}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{m^4} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

est le déplacement d'une plaque infiniment longue ($\lambda = \infty$) sous

l'action de la charge $p(x)$, nous pouvons écrire la solution (31) sous la forme :

$$w(x, y) = w_0(x) - \frac{a^4}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{m^4} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (32)$$

qui ne contient plus que des séries très rapidement convergentes.

Il est facile de calculer $w_0(x)$; c'est l'intégrale de l'équation :

$$D \frac{d^4 w_0}{dx^4} = -p(x)$$

qui s'annule, ainsi que sa dérivée seconde, pour $x = 0$ et $x = a$.

Voici deux exemples de cette solution.

a) La densité de charge est constante : $p(x) = p$. On trouve :

$$p_m = \begin{cases} \frac{4p}{m\pi} & \text{si } m \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } m \text{ est pair} \end{cases}$$

$$w_0(x) = -\frac{p}{24D} x(a-x)(a^2 + ax - x^2)$$

b) La densité de charge est une fonction linéaire de x :

$$p(x) = q \frac{x}{a}$$

On trouve :

$$p_m = (-1)^{m+1} \frac{2q}{m\pi}$$

$$w_0(x) = -\frac{q}{360Da} x(a-x)(a+x)(7a^2 - 3x^2)$$

2,322 Second cas : $p(x, y) = (y/a)p(x)$. — La fonction $F_m(y)$ étant impaire, la solution $w(x, y)$ est de la forme :

$$w(x, y) = -\frac{a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{m^5} \left(\frac{m\pi y}{a} + C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (33)$$

p_m désignant toujours les coefficients du développement de $p(x)$ en série de sinus, et C_m et D_m :

$$C_m = -\frac{m\lambda(2 + m\lambda \coth m\lambda)}{2 \operatorname{sh} m\lambda}$$

$$D_m = \frac{m\lambda}{2 \operatorname{sh} m\lambda}$$

On peut, $w_0(x)$ gardant la même signification qu'au paragraphe 2,321, écrire $w(x, y)$ sous la forme :

$$w(x, y) = \frac{y}{a} w_0(x) - \frac{a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{m^5} \left(C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (34)$$

qui ne contient plus que des séries très rapidement convergentes.

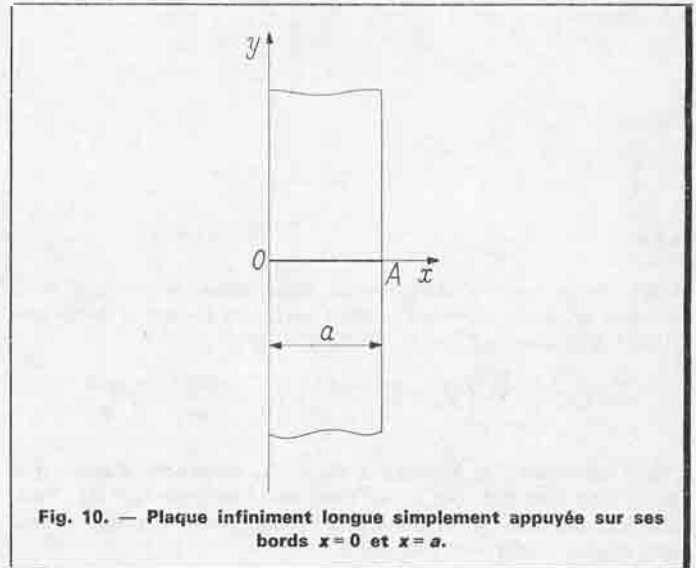


Fig. 10. — Plaque infiniment longue simplement appuyée sur ses bords $x = 0$ et $x = a$.

2,33 Plaque rectangulaire simplement appuyée en $x = 0$ et $x = a$, et encastrée en $y = -1/2 b$ et $y = 1/2 b$.

Nous examinerons, comme pour la plaque simplement appuyée (§ 2,32), deux cas de charge.

2,331 Premier cas : $p(x, y) = p(x)$. — La solution est encore donnée par les expressions (31) ou (32), mais les coefficients, déterminés par les conditions $F_m(1/2 b) = 0$ et $F'_m(1/2 b) = 0$, ont pour valeurs :

$$A_m = -\frac{\operatorname{sh} m\lambda + m\lambda \operatorname{ch} m\lambda}{\operatorname{sh} m\lambda \operatorname{ch} m\lambda + m\lambda}$$

$$B_m = \frac{\operatorname{sh} m\lambda}{\operatorname{sh} m\lambda \operatorname{ch} m\lambda + m\lambda}$$

2,332 Second cas : $p(x, y) = (y/a)p(x)$. — La solution est encore donnée par les expressions (33) ou (34), dans lesquelles les coefficients C_m et D_m ont pour valeurs :

$$C_m = -\frac{(m\lambda)^2 \operatorname{sh} m\lambda}{\operatorname{sh} m\lambda \operatorname{ch} m\lambda - m\lambda}$$

$$D_m = \frac{m\lambda \operatorname{ch} m\lambda - \operatorname{sh} m\lambda}{\operatorname{sh} m\lambda \operatorname{ch} m\lambda - m\lambda}$$

2,34 Plaque infiniment longue simplement appuyée sur ses bords $x = 0$ et $x = a$.

La solution est représentée par la série (27) dans laquelle on peut écrire $F_m(y)$ sous la forme :

$$F_m(y) = f_m(y) + \left(A_m + B_m \frac{m\pi y}{a} \right) \exp \left(-\frac{m\pi y}{a} \right) + \left(C_m + D_m \frac{m\pi y}{a} \right) \exp \left(\frac{m\pi y}{a} \right)$$

Supposons la plaque soumise à une densité linéaire de charge $P(x)$ répartie le long du segment OA de l'axe Ox (fig. 10). En raison de la symétrie, nous pouvons nous borner à chercher la solution pour y

positif; la densité de charge étant nulle, nous avons $f_m(y) = 0$; en outre, w et ses dérivées tendant vers zéro lorsque y tend vers l'infini, les constantes C_m et D_m sont nulles. Donc :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m + B_m \frac{m\pi y}{a} \right) \exp\left(-\frac{m\pi y}{a}\right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Pour déterminer les constantes A_m et B_m , observons d'abord que $\partial w / \partial y$ doit être nul pour $y = 0$; nous trouvons ainsi $A_m = B_m$. Puis, nous écrivons que l'effort tranchant T_2 pour $y = \varepsilon$ (ε positif et très petit) a pour valeur $-1/2 P(x)$:

$$(T_2)_{y=\varepsilon} = -\frac{1}{2} P(x)$$

Or T_2 a pour valeur [relation (13)] :

$$T_2 = D \frac{\partial (\Delta w)}{\partial y} = 2D \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \exp\left(-\frac{m\pi y}{a}\right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Donc, si nous développons $P(x)$ en série de sinus :

$$P(x) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

nous trouvons la valeur de A_m :

$$A_m = -\frac{P_m a^3}{4\pi^3 D m^3}$$

Les coefficients P_m ont pour valeurs :

$$P_m = \frac{2}{a} \int_0^a P(x) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \quad (35)$$

Finalement, en écrivant $|y|$ au lieu de y , nous obtenons la solution sous la forme suivante, valable quel que soit le signe de y :

$$w(x, y) = -\frac{a^3}{4\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_m}{m^3} \left(1 + \left| \frac{m\pi y}{a} \right| \right) \exp\left(-\left| \frac{m\pi y}{a} \right| \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (36)$$

En particulier, lorsqu'une charge concentrée Π est appliquée au point d'abscisse ξ de l'axe Ox , nous pouvons remplacer cette charge concentrée par une densité linéaire P appliquée sur l'intervalle $(\xi, \xi + d\xi)$ telle que $\Pi = P d\xi$. La formule (35) donne alors :

$$P_m = \frac{2\Pi}{a} \sin \frac{m\pi \xi}{a}$$

Nous obtenons donc la solution :

$$w(x, y) = \Pi w(\xi; x, y)$$

$w(\xi; x, y)$ étant défini par :

$$w(\xi; x, y) = -\frac{a^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(1 + \left| \frac{m\pi y}{a} \right| \right) \exp\left(-\left| \frac{m\pi y}{a} \right| \right) \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (37)$$

Cette fonction est une fonction d'influence qui permet de calculer le déplacement $w(x, y)$ sous l'action d'une densité superficielle

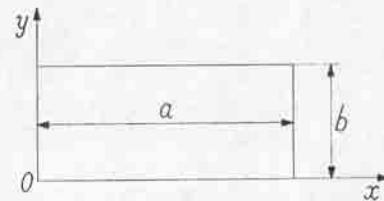


Fig. 11. — Plaque rectangulaire soumise à une densité de charge constante.

Tableau I. — Valeurs des fonctions $F(\rho)$ et $F(1/\rho)$.

ρ	$10^6 F(\rho)$	$10^6 F(1/\rho)$	ρ	$10^6 F(\rho)$	$10^6 F(1/\rho)$
0	0	0	0,55	49 086	11 532
0,05	6 250	0	0,60	49 229	14 540
0,10	12 500	0	0,65	48 771	17 638
0,15	18 743	6	0,70	47 821	20 749
0,20	24 901	79	0,75	46 484	23 805
0,25	30 751	378	0,80	44 853	26 755
0,30	36 010	1 078	0,85	43 009	29 557
0,35	40 457	2 277	0,90	41 021	32 183
0,40	43 980	3 988	0,95	38 947	34 613
0,45	46 556	6 159	1	36 836	36 836
0,50	48 230	8 706			

Tableau II. — Valeurs des coefficients K_1 et K_2 pour une plaque encastrée en $y = 0$ et $y = b$.

b/a	$10^6 K_1$	$10^6 K_2$	a/b	$10^6 K_1$	$10^6 K_2$
0	0	83 333	0	125 000	0
0,1	833	83 333	0,1	125 000	1 250
0,2	3 333	83 331	0,2	124 999	5 000
0,3	7 512	83 471	0,3	124 847	11 236
0,4	13 443	84 020	0,4	123 436	19 750
0,5	21 066	84 263	0,5	119 084	29 771
0,6	30 038	83 440	0,6	111 380	40 097
0,7	39 873	81 374	0,7	101 346	49 660
0,8	50 070	78 234	0,8	90 414	57 865
0,9	60 181	74 298	0,9	79 700	64 557
1	69 837	69 837	1	69 837	69 837

$p(x, y)$ appliquée sur une aire A du plan moyen de la plaque à l'aide de la formule :

$$w(x, y) = \iint_A p(\xi, \eta) w(\xi; x, y - \eta) d\xi d\eta$$

En effet, la charge concentrée $p d\xi d\eta$ appliquée au point (ξ, η) donne au point (x, y) un déplacement $p d\xi d\eta w(\xi; x, y - \eta)$.

2,4 QUELQUES RÉSULTATS CONCERNANT LES PLAQUES RECTANGULAIRES UNIFORMÉMENT CHARGÉES

Une plaque rectangulaire de côtés a et b (fig. 11) est soumise à une densité de charge constante p . Elle est simplement appuyée le long des côtés $x = 0$ et $x = a$.

Tableau III. — Valeurs du coefficient K pour une plaque libre en $y = 0$ et $y = b$.

b/a	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$	a/b	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$
0	1	1	1	0	1,029 032	1,050 000	1,063 636
0,1	1,000 545	1,000 889	1,001 077	0,1	1,029 032	1,050 000	1,063 636
0,2	1,002 170	1,003 540	1,004 293	0,2	1,029 032	1,050 000	1,063 636
0,3	1,004 713	1,007 725	1,009 403	0,3	1,029 020	1,049 977	1,063 606
0,4	1,007 790	1,012 852	1,015 733	0,4	1,028 902	1,049 764	1,063 320
0,5	1,010 999	1,018 270	1,022 500	0,5	1,028 530	1,049 086	1,062 416
0,6	1,014 051	1,023 489	1,029 091	0,6	1,027 828	1,047 813	1,060 718
0,7	1,016 788	1,028 221	1,035 127	0,7	1,026 821	1,045 993	1,058 300
0,8	1,019 146	1,032 339	1,040 425	0,8	1,025 585	1,043 768	1,055 354
0,9	1,021 125	1,035 821	1,044 938	0,9	1,024 205	1,041 294	1,052 095
1	1,022 753	1,038 706	1,048 701	1	1,022 753	1,038 706	1,048 701

2,41 Plaque simplement appuyée en $y = 0$ et $y = b$.

En posant $\rho = a/b$, les moments fléchissants au centre de la plaque ($a/2, b/2$) ont pour valeurs :

$$M_1 = \rho ab [F(\rho) + \nu F(1/\rho)]$$

$$M_2 = \rho ab [F(1/\rho) + \nu F(\rho)]$$

la fonction $F(\rho)$ étant définie par :

$$F(\rho) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^2 \pi^2} \frac{\operatorname{sh} (1/2 m \pi \rho)}{\operatorname{ch}^2 (1/2 m \pi \rho)} \sin \frac{m \pi}{2}$$

Le tableau I donne quelques valeurs des fonctions $F(\rho)$ et $F(1/\rho)$.

2,42 Plaque encastree en $y = 0$ et $y = b$.

En posant $\lambda_m = m \pi b/a$, le moment fléchissant M_2 le long des bords $y = 0$ et $y = b$ a pour valeur :

$$M_2 = \rho a^2 \left[\sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{8}{m^3 \pi^3} \frac{\lambda_m}{\operatorname{sh} \lambda_m} \sin \frac{m \pi x}{a} - \frac{1}{2} \frac{x}{a} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right]$$

En particulier, le moment M_2 au milieu des bords encastres est de la forme :

$$M_2 = -K_1 \rho a^2 = -K_2 \rho b^2$$

Le tableau II donne les valeurs des coefficients K_1 et K_2 .

2,43 Plaque libre en $y = 0$ et $y = b$.

En posant $\lambda_m = m \pi b/a$, le moment fléchissant M_1 le long des bords libres $y = 0$ et $y = b$ a pour valeur :

$$M_1 = \rho a^2 \left[\frac{(1+\nu)(3-\nu)}{3+\nu} \frac{1}{2} \frac{x}{a} \left(1 - \frac{x}{a} \right) - \frac{2\nu(1+\nu)}{3+\nu} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{4}{m^3 \pi^3} \frac{\lambda_m}{[(3+\nu)/(1-\nu)] \operatorname{sh} \lambda_m - \lambda_m} \sin \frac{m \pi x}{a} \right]$$

En particulier, le moment M_1 au milieu des bords libres est de la forme :

$$M_1 = \frac{1}{8} \rho a^2 K$$

Le coefficient K , qui dépend de ν , est donné par le tableau III.

 Tableau IV. — Valeurs de K_1 et K_2 pour une plaque encastree en $y = 0$ et simplement appuyée en $y = b$.

b/a	$10^6 K_1$	$10^6 K_2$	a/b	$10^6 K_1$	$10^6 K_2$
0	0	125 000	0	125 000	0
0,1	1 250	125 000	0,1	125 000	1 250
0,2	5 001	125 023	0,2	124 999	5 000
0,3	11 264	125 160	0,3	124 916	11 242
0,4	19 889	124 304	0,4	124 114	19 858
0,5	30 298	121 190	0,5	121 513	30 378
0,6	41 683	115 787	0,6	116 586	41 971
0,7	53 269	108 712	0,7	109 629	53 718
0,8	64 428	100 668	0,8	101 378	64 882
0,9	74 717	92 243	0,9	92 595	75 002
1	83 875	83 875	1	83 875	83 875

2,44 Plaque encastree en $y = 0$ et simplement appuyée en $y = b$.

En posant $\lambda_m = m \pi b/a$, le moment M_2 le long du bord encastree $y = 0$ a pour valeur :

$$M_2 = \rho a^2 \left[\sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{4}{m^3 \pi^3} \frac{\operatorname{sh} \lambda_m + \lambda_m (\operatorname{ch} \lambda_m - 2)}{\operatorname{sh} \lambda_m \operatorname{ch} \lambda_m - \lambda_m} \sin \frac{m \pi x}{a} - \frac{1}{2} \frac{x}{a} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right]$$

En particulier, le moment M_2 au milieu du bord encastree est de la forme :

$$M_2 = -K_1 \rho a^2 = -K_2 \rho b^2$$

Le tableau IV donne les valeurs des coefficients K_1 et K_2 .

2,45 Plaque libre en $y = 0$ et simplement appuyée en $y = b$.

Le moment fléchissant M_1 au milieu du bord libre est de la forme :

$$M_1 = \frac{1}{8} \rho a^2 K$$

Tableau V. — Valeurs de K pour une plaque libre en $y=0$ et simplement appuyée en $y=b$ ($\nu=0,2$).

b/a	K	a/b	K
0	0	0	1,050 000
0,1	0,114 826	0,1	1,050 000
0,2	0,205 849	0,2	1,050 000
0,3	0,346 281	0,3	1,049 939
0,4	0,493 594	0,4	1,049 159
0,5	0,624 612	0,5	1,045 953
0,6	0,731 231	0,6	1,038 468
0,7	0,813 846	0,7	1,025 641
0,8	0,876 162	0,8	1,007 334
0,9	0,922 482	0,9	0,984 054
1	0,956 639	1	0,956 639

Le coefficient K dépend de ν ; pour $\nu=0,2$ sa valeur est ($\lambda_m = m\pi b/a$) :

$$K = 1,05 - 4,8 \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^3 \pi^3} \frac{8\lambda_m \operatorname{ch} \lambda_m + 28 \operatorname{sh} \lambda_m - \lambda_m}{4 \operatorname{sh} \lambda_m \operatorname{ch} \lambda_m + \lambda_m} \sin \frac{m\pi}{2}$$

Le tableau V donne les valeurs du coefficient K pour $\nu=0,2$.

2,46 Plaque libre en $y=0$ et encadrée en $y=b$.

Le moment M_1 au milieu du bord libre $y=0$ et le moment M_2 au milieu du bord encadré $y=b$ sont de la forme :

$$M_1 = \frac{1}{8} p a^2 K, \quad M_2 = -K_1 p a^2 = -K_2 p b^2$$

Les coefficients K , K_1 et K_2 dépendent de ν . Pour $\nu=0,2$, on trouve :

$$K = 1,05 - 9,6 \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^3 \pi^3} \frac{32\lambda_m \operatorname{sh} \lambda_m + 80 \operatorname{ch} \lambda_m - 2\lambda_m^2 + 7,5}{16 \operatorname{ch}^2 \lambda_m + 4\lambda_m^2 + 9} \sin \frac{m\pi}{2}$$

$$K_1 = \frac{1}{8} - \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^3 \pi^3} \frac{8\lambda_m \operatorname{sh} \lambda_m - 20 \operatorname{ch} \lambda_m + 32\lambda_m^2 + 120}{16 \operatorname{ch}^2 \lambda_m + 4\lambda_m^2 + 9} \sin \frac{m\pi}{2}$$

λ_m désignant toujours $m\pi b/a$.

Le tableau VI donne les valeurs des coefficients K , K_1 et K_2 pour $\nu=0,2$.

Remarque : tous les résultats précédents ont été obtenus au moyen de la solution de Maurice Lévy (§ 2,31). Les séries peuvent être rapidement sommées à l'aide d'une calculatrice de poche programmable.

On peut traiter de la même façon les cas de charge suivants :

- densité superficielle de charge $p y/b$;
- densité linéaire P le long de $x = \xi$ ($0 < \xi < a$) ;
- densité linéaire $P y/b$ le long de $x = \xi$ ($0 < \xi < a$).

Tableau VI. — Valeurs de K , K_1 et K_2 pour une plaque libre en $y=0$ et encadrée en $y=b$ ($\nu=0,2$).

b/a	K	$10^6 K_1$	$10^6 K_2$	a/b	K	$10^6 K_1$	$10^6 K_2$
0	0	0	500 000	0	1,050 000	125 000	0
0,1	0,000 033	4 996	499 621	0,1	1,050 000	125 000	1 250
0,2	0,005 767	19 314	482 851	0,2	1,049 997	125 000	5 000
0,3	0,041 314	39 119	434 655	0,3	1,049 545	124 993	11 249
0,4	0,118 515	59 411	371 316	0,4	1,045 023	124 930	19 989
0,5	0,227 206	77 128	308 514	0,5	1,029 709	124 733	31 183
0,6	0,349 917	91 187	253 298	0,6	0,999 166	124 303	44 749
0,7	0,471 515	101 657	207 463	0,7	0,953 321	123 505	60 517
0,8	0,582 393	109 115	170 492	0,8	0,897 077	122 196	78 205
0,9	0,678 082	114 266	141 069	0,9	0,828 505	120 284	97 430
1	0,757 657	117 750	117 750	1	0,757 657	117 750	117 750

3 Plaques circulaires

3.1 PLAQUES CIRCULAIRES SYMÉTRIQUEMENT CHARGÉES

3.11 Équations générales.

Prenons pour origine des coordonnées polaires (r, θ) le centre O de la plaque. Par hypothèse, la densité de charge p n'est fonction que de r , et les conditions d'appui sur le contour de la plaque ne dépendent pas de θ . Dans ces conditions, le déplacement w n'est fonction que de r , et est une intégrale de l'équation de Lagrange (12) qui se réduit alors à l'équation différentielle :

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = -\frac{p(r)}{D} \quad (38)$$

L'intégration de cette équation différentielle se ramène à quatre intégrations successives, comme on le voit en l'écrivant sous la forme :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = -\frac{p(r)}{D}$$

Le moment fléchissant M_r par unité de longueur d'une circonférence de rayon r , et le moment fléchissant M_θ par unité de longueur d'un rayon se déduisent de $w(r)$ par les formules :

$$\left. \begin{aligned} M_r &= D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \\ M_\theta &= D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

et le long des circonférences de rayon r et des rayons, le moment de torsion C est nul. En effet, le plan moyen de la plaque devient, après déformation, une surface de révolution dont les courbures principales sont $d^2 w/dr^2$ suivant le méridien et $(1/r) dw/dr$ suivant le parallèle.

L'effort tranchant T par unité de longueur d'une circonférence de rayon r a pour valeur :

$$T = D \frac{d(\Delta w)}{dr} = D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \quad (40)$$

Les conditions aux limites s'expriment aisément.

— Dans le cas où le bord $r = a$ est *encastré*, nous devons avoir :

$$w = 0 \text{ et } \frac{dw}{dr} = 0 \text{ pour } r = a$$

— Dans le cas où le bord $r = a$ est *simplement appuyé*, nous devons avoir :

$$w = 0 \text{ et } \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} = 0 \text{ pour } r = a$$

— Dans le cas où le bord $r = a$ est *libre*, nous devons avoir :

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} = 0 \text{ et } \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = 0 \text{ pour } r = a$$

L'intégrale générale de l'équation différentielle (38) est de la forme :

$$w(r) = w_0(r) + A_1 + A_2 r^2 + A_3 \ln r + A_4 r^2 \ln r$$

$w_0(r)$ désignant une intégrale particulière que l'on peut toujours obtenir au moyen de quatre intégrations successives.

Cette intégrale générale contient quatre constantes A_1, A_2, A_3 et A_4 que l'on peut calculer en utilisant quatre conditions aux limites.

Nous pourrions ainsi déterminer le déplacement $w(r)$ d'une plaque annulaire limitée par deux cercles concentriques de rayons a et b ; nous avons en effet deux conditions aux limites le long de chacun de ces cercles.

Dans le cas d'une plaque circulaire limitée par un cercle de rayon a , nous devons, $w(r)$ et ses dérivées devant rester finis pour $r = 0$, prendre A_3 et A_4 nuls ; nous avons donc dans ce cas :

$$w(r) = w_0(r) + A_1 + A_2 r^2$$

et les constantes A_1 et A_2 sont déterminées par les deux conditions aux limites sur le bord $r = a$ de la plaque.

3.12 Plaques circulaires uniformément chargées.

Il s'agit, par exemple, de fonds de réservoirs cylindriques, annulaires, etc.

Dans ce cas, le déplacement $w(r)$ est de la forme :

$$w(r) = -\frac{pr^4}{64D} + A_1 + A_2 r^2$$

et les conditions aux limites permettent de calculer A_1 et A_2 .

3.121 Plaque encastree. — On trouve pour expressions de $w(r)$ $M_r(r)$ et $M_\theta(r)$:

$$w(r) = -\frac{p}{64D} (a^2 - r^2)^2$$

$$M_r(r) = \frac{1}{16} p [(1 + \nu) a^2 - (3 + \nu) r^2]$$

$$M_\theta(r) = \frac{1}{16} p [(1 + \nu) a^2 - (1 + 3\nu) r^2]$$

En particulier, au centre $r = 0$ de la plaque :

$$w(0) = -\frac{pa^4}{64D}, \quad M_r(0) = M_\theta(0) = \frac{1 + \nu}{16} pa^2$$

et sur le bord $r = a$ de la plaque :

$$M_r(a) = -\frac{1}{8} pa^2, \quad M_\theta(a) = -\frac{\nu}{8} pa^2$$

3.122 Plaque simplement appuyée. — On trouve pour expressions de $w(r)$, $M_r(r)$ et $M_\theta(r)$:

$$w(r) = -\frac{P}{64D} (a^2 - r^2) \left[\frac{5 + \nu}{1 + \nu} a^2 - r^2 \right]$$

$$M_r(r) = \frac{3 + \nu}{16} p (a^2 - r^2)$$

$$M_\theta(r) = \frac{1}{16} p [(3 + \nu) a^2 - (1 + 3\nu) r^2]$$

En particulier, au centre $r = 0$ de la plaque :

$$w(0) = -\frac{5 + \nu}{1 + \nu} \frac{pa^4}{64D}, \quad M_r(0) = M_\theta(0) = \frac{3 + \nu}{16} pa^2$$

et, sur le bord $r = a$ de la plaque :

$$M_r(a) = 0, \quad M_\theta(a) = \frac{1-\nu}{8} p a^2$$

3,13 Plaques circulaires chargées concentriquement.

3,130. Considérons une plaque circulaire de rayon a soumise à une charge totale P uniformément le long de la circonférence de rayon ρ [densité linéaire $P/(2\pi\rho)$]. Le déplacement w et les moments M_r et M_θ le long de la circonférence de rayon r sont de la forme :

$$w(r) = P w(\rho, r); \quad M_r(r) = P M_r(\rho, r); \quad M_\theta(r) = P M_\theta(\rho, r)$$

La connaissance des fonctions $w(\rho, r)$, $M_r(\rho, r)$ et $M_\theta(\rho, r)$ permet de calculer w , M_r et M_θ pour une densité de charge $p(r)$ quelconque appliquée à la plaque. En effet, la charge totale appliquée entre les cercles de rayons ρ et $\rho + d\rho$ étant égale à $2\pi\rho d\rho p(\rho)$, nous obtenons par superposition les formules :

$$w(r) = 2\pi \int_0^a p(\rho) w(\rho, r) \rho d\rho$$

$$M_r(r) = 2\pi \int_0^a p(\rho) M_r(\rho, r) \rho d\rho$$

$$M_\theta(r) = 2\pi \int_0^a p(\rho) M_\theta(\rho, r) \rho d\rho$$

Voici l'expression des **fonctions d'influence** $w(\rho, r)$, $M_r(\rho, r)$ et $M_\theta(\rho, r)$ dans le cas de la plaque encastree et de la plaque simplement appuyée.

3,131 Plaque encastree.

$$w(\rho, r) = \begin{cases} -\frac{1}{8\pi D} \left[\frac{(a^2 + r^2)(a^2 - \rho^2)}{2a^2} + (r^2 + \rho^2) \ln \frac{\rho}{a} \right] & \text{pour } r < \rho \\ -\frac{1}{8\pi D} \left[\frac{(a^2 - r^2)(a^2 + \rho^2)}{2a^2} + (r^2 + \rho^2) \ln \frac{r}{a} \right] & \text{pour } r > \rho \end{cases}$$

$$M_r(\rho, r) = \begin{cases} -\frac{1+\nu}{8\pi} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} + 2 \ln \frac{\rho}{a} \right) & \text{pour } r < \rho \\ -\frac{1}{8\pi} \left[2 - (1-\nu) \frac{\rho^2}{r^2} - (1+\nu) \left(\frac{\rho^2}{a^2} - 2 \ln \frac{r}{a} \right) \right] & \text{pour } r > \rho \end{cases}$$

$$M_\theta(\rho, r) = \begin{cases} -\frac{1+\nu}{8\pi} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} + 2 \ln \frac{\rho}{a} \right) & \text{pour } r < \rho \\ -\frac{1}{8\pi} \left[2\nu + (1-\nu) \frac{\rho^2}{r^2} - (1+\nu) \left(\frac{\rho^2}{a^2} - 2 \ln \frac{r}{a} \right) \right] & \text{pour } r > \rho \end{cases}$$

3,132 Plaque simplement appuyée.

$$w(\rho, r) = \begin{cases} -\frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{(a^2 - \rho^2)[(3+\nu)a^2 - (1-\nu)r^2]}{2(1+\nu)a^2} + (r^2 + \rho^2) \ln \frac{\rho}{a} \right\} & \text{pour } r < \rho \\ -\frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{(a^2 - r^2)[(3+\nu)a^2 - (1-\nu)\rho^2]}{2(1+\nu)a^2} + (r^2 + \rho^2) \ln \frac{r}{a} \right\} & \text{pour } r > \rho \end{cases}$$

$$M_r(\rho, r) = \begin{cases} \frac{1}{8\pi} \left[(1-\nu) \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - 2(1+\nu) \ln \frac{\rho}{a} \right] & \text{pour } r < \rho \\ \frac{1}{8\pi} \left[(1-\nu) \left(\frac{\rho^2}{r^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - 2(1+\nu) \ln \frac{r}{a} \right] & \text{pour } r > \rho \end{cases}$$

$$M_\theta(\rho, r) = \begin{cases} \frac{1}{8\pi} \left[(1-\nu) \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - 2(1+\nu) \ln \frac{\rho}{a} \right] & \text{pour } r < \rho \\ \frac{1}{8\pi} \left[(1-\nu) \left(2 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - 2(1+\nu) \ln \frac{r}{a} \right] & \text{pour } r > \rho \end{cases}$$

Remarques : dans ces deux cas, on vérifie que l'on a bien, conformément au théorème de réciprocité de Maxwell-Betti (cf article *Théorie de l'élasticité*) :

$$w(\rho, r) = w(r, \rho)$$

En outre pour $r < \rho$, $M_r(\rho, r)$ et $M_\theta(\rho, r)$ sont égaux et ne dépendent pas de r ; la partie de la plaque intérieure au cercle de rayon ρ est donc soumise à la flexion sphérique.

3,2 PLAQUES CIRCULAIRES SOUMISES A UNE DENSITÉ DE CHARGE QUELCONQUE

3,21 Équations générales.

Prenons pour origine des coordonnées polaires le centre O de la plaque. La densité de charge appliquée à la plaque est une fonction $p(r, \theta)$ de r et de θ . Les formules générales suivantes s'obtiennent au moyen du changement de variables qui permet de passer des coordonnées cartésiennes (x, y) aux coordonnées polaires (r, θ) .

Le déplacement $w(r, \theta)$ est une intégrale de l'équation de Lagrange (12) qui s'écrit en coordonnées polaires :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = -\frac{p(r, \theta)}{D} \quad (4)$$

Les composantes du tenseur flexion en un point P du plan moyen sont M_r , M_θ et C ; ce sont les composantes du tenseur flexion relativement aux axes rectangulaires $Px'y'$, Px' étant dirigé suivant le rayon OP . Ces composantes se déduisent de w par les formules :

$$\left. \begin{aligned} M_r &= D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ M_\theta &= D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \\ C &= D (1 - \nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Les efforts tranchants T_r le long du cercle de rayon r et T_θ le long du rayon d'angle polaire θ sont donnés par les formules :

$$\left. \begin{aligned} T_r &= D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ T_\theta &= D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Supposons la plaque annulaire limitée par deux cercles de rayons a et b ; la densité de réaction d'appui, le long du cercle intérieur $r = b$, a pour valeur :

$$R_b = \left(T_r + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} \right)_{r=b} \quad (44)$$

et la densité de réaction, le long du cercle extérieur $r = a$, a pour valeur :

$$R_a = - \left(T_r + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} \right)_{r=a} \quad (45)$$

3,22 Solution de Clebsch.

Elle consiste à développer la densité de charge en série trigonométrique :

$$p(r, \theta) = p_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [p_n(r) \cos n\theta + \bar{p}_n(r) \sin n\theta]$$

et à rechercher la solution sous la forme d'une série trigonométrique :

$$w(r, \theta) = F_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [F_n(r) \cos n\theta + \bar{F}_n(r) \sin n\theta] \quad (46)$$

La série précédente est une intégrale de l'équation de Lagrange (41) si les fonctions $F_0(r)$, $F_n(r)$ et $\bar{F}_n(r)$ vérifient les équations différentielles linéaires :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 F_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF_0}{dr} \right) &= -\frac{p_0(r)}{D} \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 F_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} F_n \right) &= -\frac{p_n(r)}{D} \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 \bar{F}_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{F}_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \bar{F}_n \right) &= -\frac{\bar{p}_n(r)}{D} \end{aligned} \right\}$$

L'intégrale générale de l'équation différentielle en F_0 est :

$$F_0(r) = \varphi_0(r) + A_0 + B_0 \ln r + C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r$$

Les intégrales générales des équations différentielles en F_n et $\bar{F}_n$ sont :

— pour $n = 1$:

$$F_1(r) = \varphi_1(r) + A_1 r + B_1 r^{-1} + C_1 r^3 + D_1 r \ln r$$

$$\bar{F}_1(r) = \bar{\varphi}_1(r) + \bar{A}_1 r + \bar{B}_1 r^{-1} + \bar{C}_1 r^3 + \bar{D}_1 r \ln r$$

— pour $n > 1$:

$$F_n(r) = \varphi_n(r) + A_n r^n + B_n r^{-n} + C_n r^{n+2} + D_n r^{-n+2}$$

$$\bar{F}_n(r) = \bar{\varphi}_n(r) + \bar{A}_n r^n + \bar{B}_n r^{-n} + \bar{C}_n r^{n+2} + \bar{D}_n r^{-n+2}$$

$\varphi_0(r)$, $\varphi_n(r)$ et $\bar{\varphi}_n(r)$ désignent des intégrales particulières que l'on peut toujours obtenir par la méthode de la variation des constantes.

La solution générale (46) de l'équation de Lagrange renferme les constantes $A_0, B_0, C_0, D_0, A_n, B_n, C_n, D_n, \bar{A}_n, \bar{B}_n, \bar{C}_n$ et $\bar{D}_n$ que l'on peut déterminer en écrivant les conditions aux limites le long des bords $r = b$ et $r = a$ de la plaque. Supposons que les conditions d'appui le long de ces bords soient les suivantes : bord encastré, bord simplement appuyé ou bord libre ; les conditions aux limites correspondantes étant homogènes, il suffira d'écrire que les solutions particulières :

$w_0(r) = F_0(r)$, $w_n(r, \theta) = F_n(r) \cos n\theta$, $\bar{w}_n(r, \theta) = \bar{F}_n(r) \sin n\theta$ vérifient ces conditions aux limites. Nous obtenons ainsi des équations linéaires pour déterminer les constantes.

Précisons les conditions aux limites le long du bord $r = a$, par exemple.

— Le bord $r = a$ est encastré ; w et $\partial w / \partial r$ doivent être nuls, donc :

$$\left. \begin{aligned} F_0(a) &= 0, & F'_0(a) &= 0 \\ F_n(a) &= 0, & F'_n(a) &= 0 \\ \bar{F}_n(a) &= 0, & \bar{F}'_n(a) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

— Le bord $r = a$ est simplement appuyé ; w et M_r doivent être nuls, donc :

$$\left. \begin{aligned} F_0(a) &= 0, & F''_0(a) + \frac{\nu}{a} F'_0(a) &= 0 \\ F_n(a) &= 0, & F''_n(a) + \frac{\nu}{a} F'_n(a) &= 0 \\ \bar{F}_n(a) &= 0, & \bar{F}''_n(a) + \frac{\nu}{a} \bar{F}'_n(a) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

— Le bord $r = a$ est libre ; M_r et R doivent être nuls ; il en résulte que :

$$\left. \begin{aligned} F''_0(a) + \frac{\nu}{a} F'_0(a) &= 0 \\ F'''_0(a) - \frac{1+\nu}{a^2} F'_0(a) &= 0 \\ F''_n(a) + \frac{\nu}{a} F'_n(a) - \frac{\nu n^2}{a^2} F_n(a) &= 0 \\ F'''_n(a) - \frac{(1+\nu) + (2-\nu)n^2}{a^2} F'_n(a) + \frac{3n^2}{a^2} F_n(a) &= 0 \\ \bar{F}''_n(a) + \frac{\nu}{a} \bar{F}'_n(a) - \frac{\nu n^2}{a^2} \bar{F}_n(a) &= 0 \\ \bar{F}'''_n(a) - \frac{(1+\nu) + (2-\nu)n^2}{a^2} \bar{F}'_n(a) + \frac{3n^2}{a^2} \bar{F}_n(a) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

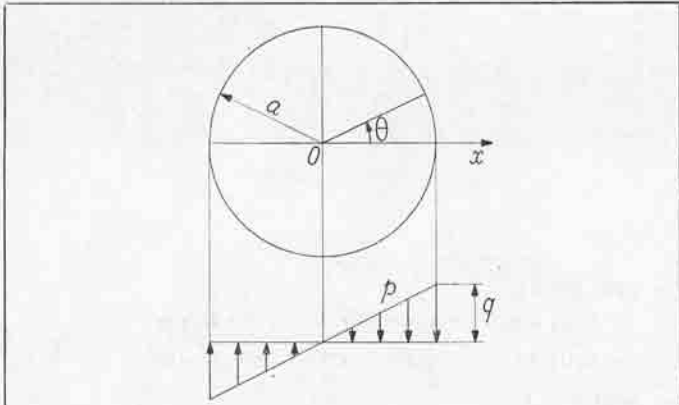


Fig. 12. — Plaque circulaire simplement appuyée soumise à une densité de charge linéaire.

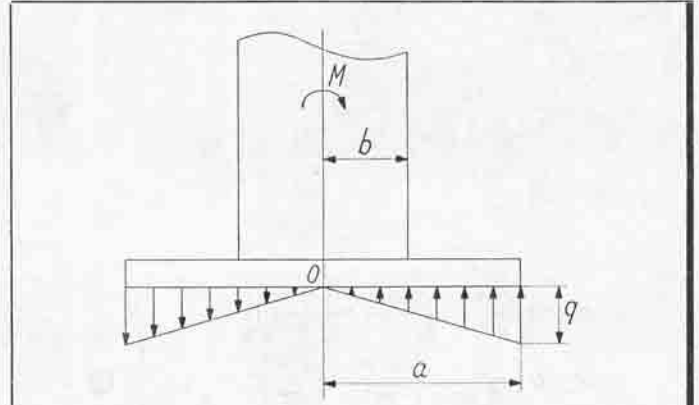


Fig. 13. — Massif cylindrique reposant sur une dalle circulaire.

3,23 Exemples.

3,231 Premier exemple. — Une plaque circulaire simplement appuyée est soumise à une densité de charge (fig. 12) :

$$p(r, \theta) = q \frac{x}{a} = q \frac{r}{a} \cos \theta$$

Il en résulte que $w(r, \theta)$ est de la forme :

$$w(r, \theta) = F_1(r) \cos \theta$$

Compte tenu de l'intégrale particulière $\varphi_1(r) = -qr^5/(192Da)$, on peut écrire $F_1(r)$ sous la forme :

$$F_1(r) = -\frac{qa^4}{192D} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^5 + A \left(\frac{r}{a}\right) + B \left(\frac{r}{a}\right)^{-1} + C \left(\frac{r}{a}\right)^3 + D \left(\frac{r}{a}\right) \ln \left(\frac{r}{a}\right) \right]$$

Le déplacement et les moments au centre $r = 0$ de la plaque étant finis, les constantes B et D sont nulles. Les deux autres constantes A et C sont déterminées par les conditions aux limites pour $r = a$:

$$F_1(a) = 0, \quad F_1''(a) + \frac{\nu}{a} F_1'(a) = 0$$

Nous obtenons ainsi la solution :

$$w(r, \theta) = -\frac{qa^4}{192D} \left[\frac{r}{a} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \left(\frac{7+\nu}{3+\nu} - \frac{r^2}{a^2} \right) \right] \cos \theta$$

Les formules (42) donnent ensuite les composantes du tenseur flexion :

$$M_r = \frac{(5+\nu)qa^2}{48} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \frac{r}{a} \cos \theta$$

$$M_\theta = \frac{qa^2}{48(3+\nu)} \left[(1+3\nu)(5+\nu) - (3+\nu)(1+5\nu) \frac{r^2}{a^2} \right] \frac{r}{a} \cos \theta$$

$$C = \frac{(1-\nu)qa^2}{48(3+\nu)} \left[(3+\nu) \frac{r^2}{a^2} - (5+\nu) \right] \frac{r}{a} \sin \theta$$

Enfin, les formules (43) donnent les efforts tranchants :

$$T_r = \frac{qa}{24(3+\nu)} \left[2(5+\nu) - 9(3+\nu) \frac{r^2}{a^2} \right] \cos \theta$$

$$T_\theta = \frac{qa}{24(3+\nu)} \left[3(3+\nu) \frac{r^2}{a^2} - 2(5+\nu) \right] \sin \theta$$

3,232 Second exemple. — Un massif cylindrique rigide (tour, cheminée) de rayon b repose sur le sol par l'intermédiaire d'une dalle circulaire de rayon $a > b$ (fig. 13). Cette dalle sera soumise au moment M dû à la pression du vent. Si nous admettons que les réactions du sol dues à ce moment sont linéairement réparties, la dalle de fondation peut être assimilée à une plaque annulaire ($b < r < a$) soumise à une densité de charge :

$$p(r, \theta) = q \frac{x}{a} = q \frac{r}{a} \cos \theta$$

La solution aura donc la même forme que dans le premier exemple.

Pour déterminer les constantes A, B, C et D qui figurent dans l'expression de $F_1(r)$, écrivons les conditions aux limites le long du bord libre $r = a$, soit, puisque $n = 1$:

$$F_1'(a) + \frac{\nu}{a} F_1'(a) - \frac{\nu}{a^2} F_1(a) = 0$$

$$F_1'''(a) - \frac{3}{a^2} F_1'(a) + \frac{3}{a^2} F_1(a) = 0$$

puis, la plaque étant encastrée sur le massif cylindrique infiniment rigide le long du cercle de rayon $b = ka$, nous devons avoir sur ce cercle $\partial w / \partial r = w/r$, soit :

$$F_1'(ka) - \frac{1}{a} F_1(ka) = 0 \quad \left(k = \frac{b}{a} \right)$$

Ces trois conditions permettent de calculer les constantes B, C et D ; nous obtenons ainsi la solution :

$$w = -\frac{qa^4}{192D} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^5 + A \left(\frac{r}{a}\right) + B \left(\frac{r}{a}\right)^{-1} + C \left(\frac{r}{a}\right)^3 + 12 \left(\frac{r}{a}\right) \ln \left(\frac{r}{a}\right) \right]$$

dans laquelle les constantes B et C ont les valeurs :

$$B = 2k^2 \frac{(3+\nu)(3+k^4) - 4(2+\nu)k^2}{(3+\nu) + (1-\nu)k^4}$$

$$C = -2 \frac{4(2+\nu) + (1-\nu)(3+k^4)k^2}{(3+\nu) + (1-\nu)k^4}$$

La constante A n'est pas déterminée ; elle correspond à une rotation d'ensemble du massif cylindrique autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, et ne peut être calculée que si l'on connaît le module de réaction du sol. Mais les moments fléchissants M_r et M_θ , le moment de torsion C et les efforts tranchants T_r et T_θ sont cependant bien déterminés, car les formules (42) et (43) fournissent des valeurs qui ne dépendent pas de A .

4 Voilement des plaques minces

4,1 VOILEMENT D'UNE PLAQUE UNIFORMÉMENT COMPRIMÉE

4,11 Méthodes générales de calcul.

La plaque est soumise le long de son contour (Γ) à un effort normal Q constant par unité de longueur (fig. 14). Appliquons la méthode de l'énergie (§ 1,5) pour déterminer la valeur Q_c qui provoque le voilement de la plaque. Donnons donc à la plaque une déformation, compatible avec les liaisons au contour, définie par le déplacement w .

L'énergie de déformation ou potentiel élastique W de la plaque est donnée par la formule (9), ou plus simplement par la formule (19) :

$$W = \frac{1}{2} D \iint_S w \Delta \Delta w \, dS$$

Calculons le travail $\mathcal{W}$ des forces extérieures $Q ds$ appliquées le long du contour. La plaque déformée se projette suivant une aire $S - \varepsilon$ limitée par un contour (Γ') voisin de (Γ) ; nous avons, puisque l'aire S de la plaque ne change pas et que $\partial w / \partial x$ et $\partial w / \partial y$ sont très petits :

$$\begin{aligned} S &= \iint_{S-\varepsilon} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} \, dS \\ &= \iint_{S-\varepsilon} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] dS \end{aligned}$$

soit :

$$S = S - \varepsilon + \frac{1}{2} \iint_{S-\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] dS$$

Nous en déduisons la valeur de ε :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \iint_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] dS$$

Le travail $\mathcal{W}$ a pour valeur, δn désignant la distance entre les contours (Γ) et (Γ') :

$$\mathcal{W} = \int_{\Gamma} Q \delta n \, ds = Q \varepsilon = \frac{1}{2} Q \iint_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] dS$$

La stabilité de la plaque est assurée lorsque $\mathcal{W} < W$; il en résulte que l'effort normal critique Q_c qui provoque le voilement de la plaque a pour valeur :

$$Q_c = \min_{w \in \mathcal{F}} \left\{ \frac{D \iint_S w \Delta \Delta w \, dS}{\iint_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] dS} \right\} \quad (50)$$

$\mathcal{F}$ désignant la famille des fonctions w vérifiant les conditions aux limites sur le contour (Γ).

Il est possible de montrer que Q_c est la plus petite valeur de Q pour laquelle l'équation :

$$D \Delta \Delta w + Q \Delta w = 0 \quad (51)$$

Vérifier qu'une fiche placée en tête de cet article ne modifie pas le présent texte.

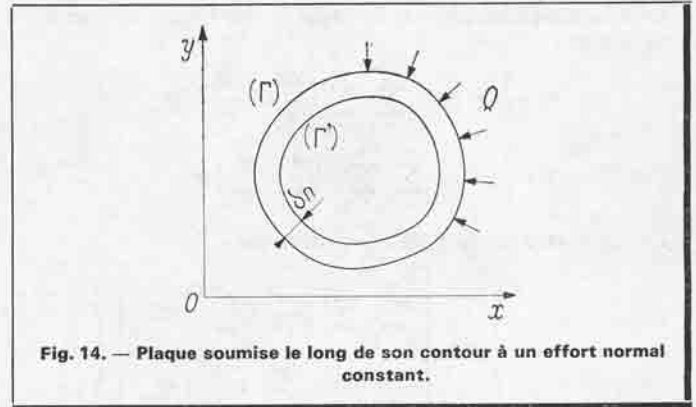


Fig. 14. — Plaque soumise le long de son contour à un effort normal constant.

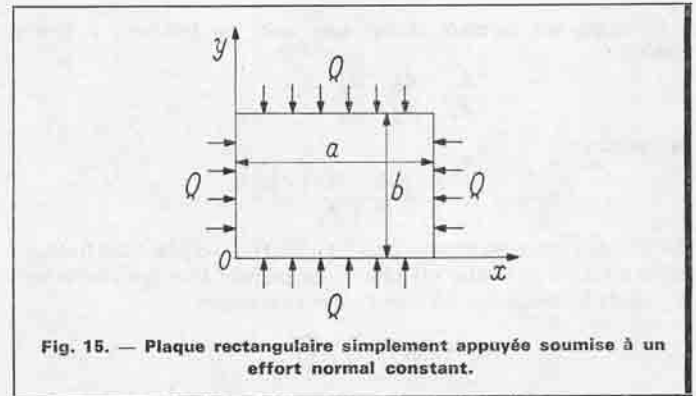


Fig. 15. — Plaque rectangulaire simplement appuyée soumise à un effort normal constant.

admet une solution non nulle vérifiant les conditions aux limites.

Dans le cas d'une plaque polygonale simplement appuyée, w et $\Delta w = M/[D(1+\nu)]$ sont nuls sur le contour (§ 1,34). Dans ce cas, la fonction harmonique $D \Delta w + Q w$, nulle sur le contour, est aussi nulle à l'intérieur du contour, et l'équation (51) peut être remplacée par l'équation :

$$D \Delta w + Q w = 0$$

Il est aisé d'établir directement l'équation (51). La plaque déformée par le voilement serait maintenue en équilibre de membrane sans flexion par une densité de charge $p = -Q_c \Delta w$. Le déplacement w au moment du voilement est donc le déplacement de la plaque soumise à une densité de charge fictive $p = Q_c \Delta w$. L'équation de Lagrange (12) se réduit alors à l'équation (51).

4,12 Plaque rectangulaire simplement appuyée.

Une déformation de la plaque (fig. 15) compatible avec les liaisons au contour est définie par un déplacement de la forme :

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Tableau VII. — Valeurs des coefficients ka et $\beta(v)$ pour une plaque circulaire de rayon a simplement appuyée.

v	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
ka	1,915 39	1,950 51	1,984 42	2,017 14	2,048 88
$\beta(v)$	3,668 7	3,804 5	3,937 9	4,068 9	4,197 9

Le potentiel élastique W et le travail $\mathcal{U}$ des forces extérieures ont pour valeurs :

$$W = \frac{1}{8} \pi^4 Dab \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 B_{m,n}^2$$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{8} \pi^2 ab \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) B_{m,n}^2$$

L'effort normal critique est donc défini par :

$$Q_c = \min \left\{ \pi^2 D \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 B_{m,n}^2}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) B_{m,n}^2} \right\}$$

En observant qu'étant donné une suite de fractions à termes positifs :

$$\frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \frac{A_3}{B_3}, \dots$$

la fraction :

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3 + \dots}{B_1 + B_2 + B_3 + \dots}$$

est toujours comprise entre la plus grande et la plus petite des fractions de la suite, le minimum est obtenu en prenant tous les coefficients $B_{m,n}$ nuls à l'exception de l'un d'entre eux, donc :

$$Q_c = \min \left\{ \pi^2 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right\}$$

Le minimum de l'expression précédente correspond évidemment à $m=1$ et $n=1$. L'effort normal critique a donc pour valeur :

$$Q_c = \pi^2 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$$

4.13 Plaque circulaire de rayon a encastree ou simplement appuyée.

Dans ce cas, le déplacement w n'est fonction que de r ; nous désignerons par $w', w'', \dots$ les dérivées de la fonction $w(r)$.

En adoptant pour W l'expression (9), le changement de variables qui permet de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires montre que :

- l'effort normal critique est défini par :

$$Q_c = \min_{w \in \mathcal{F}} \left\{ \frac{D \int_0^a \left(w''^2 + \frac{2v}{r} w' w'' + \frac{1}{r^2} w'^2 \right) r dr}{\int_0^a w'^2 r dr} \right\}$$

$\mathcal{F}$ désignant la famille des fonctions $w(r)$ qui vérifient les conditions aux limites pour $r=a$:

- l'effort normal critique est la plus petite valeur de Q pour laquelle l'équation :

$$[Dr(\Delta w)' + Qrw']' = 0$$

a une solution non nulle vérifiant les conditions aux limites.

Cette équation peut être intégrée; nous obtenons, la constante d'intégration étant nulle comme on le voit en faisant $r=0$:

$$D(\Delta w)' + Qw' = D \left(w'''' + \frac{1}{r} w''' - \frac{1}{r^2} w'' \right) + Qw' = 0$$

Posons :

$$w' = \varphi, \quad k^2 = \frac{Q}{D}$$

φ est une intégrale de l'équation différentielle :

$$\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' + \left(k^2 - \frac{1}{r^2} \right) \varphi = 0$$

Le changement de variables $u = kr$ transforme l'équation précédente en l'équation de Bessel :

$$\frac{d^2 \varphi}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d\varphi}{du} + \left(1 - \frac{1}{u^2} \right) \varphi = 0$$

dont l'intégrale générale a pour expression :

$$\varphi = A J_1(u) + B N_1(u) = A J_1(kr) + B N_1(kr)$$

La fonction de Neumann $N_1(kr)$ devenant infinie pour $r=0$, la constante B doit être nulle (elle interviendrait dans le cas d'une plaque annulaire); $\varphi(r)$ est donc de la forme :

$$\varphi(r) = A J_1(kr)$$

$J_1(u)$ désignant la fonction de Bessel d'ordre 1.

- Plaque encastree; k est donné par l'équation $\varphi(a) = 0$, soit :

$$J_1(ka) = 0$$

La plus petite racine de cette équation est $ka = 3,8317$, donc :

$$Q_c = 14,682 D/a^2$$

- Plaque simplement appuyée; k est donné par l'équation :

$$M_r(a) = D \left[w''(a) + \frac{v}{a} w'(a) \right] = D \left[\varphi'(a) + \frac{v}{a} \varphi(a) \right] = 0$$

soit, compte tenu de l'expression de $\varphi(r)$:

$$ka J_1'(ka) + v J_1(ka) = 0$$

L'identité :

$$u J_1'(u) = u J_0(u) - J_1(u)$$

permet d'écrire l'équation donnant k sous la forme :

$$ka J_0(ka) = (1-v) J_1(ka)$$

$J_0(u)$ désignant la fonction de Bessel d'ordre zéro.

L'effort normal critique est de la forme :

$$Q_c = \beta(v) \frac{D}{a^2}$$

dans laquelle le coefficient $\beta(v)$ dépend de v ; le tableau VII donne quelques résultats.

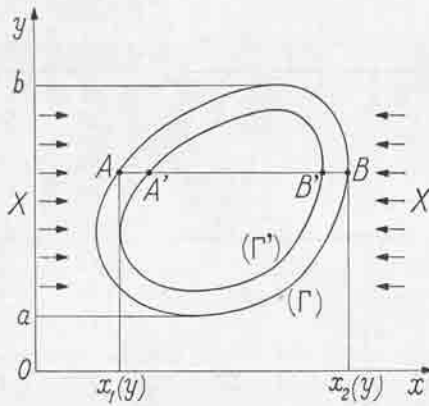


Fig. 16. — Plaque uniformément comprimée suivant la direction Ox.

4,2 VOILEMENT D'UNE PLAQUE UNIFORMÉMENT COMPRIMÉE SUIVANT LA DIRECTION Ox

4,21 Méthodes générales de calcul.

Soit X l'effort de compression par unité de longueur supporté par une section de la plaque perpendiculaire à Ox (fig. 16). Appliquons la méthode de l'énergie (§ 1,5) pour déterminer la valeur X_c qui provoque le voilement de la plaque. Donnons donc à la plaque une déformation, compatible avec les liaisons au contour, définie par le déplacement w .

L'énergie de déformation est donnée par la formule (9) ou par la formule (19).

Calculons le travail $\mathcal{W}$ des forces extérieures; sous l'action des forces de compression, le contour (Γ) vient en (Γ') , et nous avons :

$$AB - A'B' = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} - 1 \right] dx = \frac{1}{2} \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$$

de sorte que le travail $\mathcal{W}$ a pour valeur :

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} X \int_a^b dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} X \iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dS$$

La stabilité de la plaque est assurée lorsque $\mathcal{W} < W$; il en résulte que l'effort normal critique qui provoque le voilement de la plaque a pour valeur :

$$X_c = \min_{w \in \mathcal{F}} \left\{ \frac{D \iint_S w \Delta w dS}{\iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dS} \right\} \quad (52)$$

$\mathcal{F}$ désignant la famille des fonctions w qui vérifient les conditions aux limites sur le contour (Γ) .

Il est possible de montrer que X_c est la plus petite valeur de X pour laquelle l'équation :

$$D \Delta \Delta w + X \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (53)$$

admet une solution non nulle vérifiant les conditions aux limites.

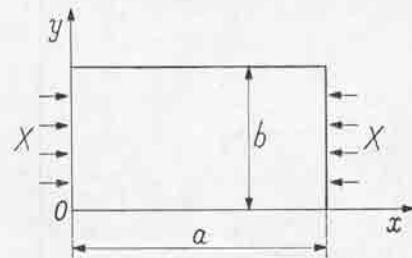


Fig. 17. — Plaque rectangulaire soumise à un effort de compression suivant la direction Ox.

4,22 Voilement d'une plaque rectangulaire uniformément comprimée suivant Ox.

4,220. Considérons une plaque rectangulaire simplement appuyée le long des bords $x = 0$ et $x = a$, et soumise à un effort normal de compression X (fig. 17). Nous nous proposons de calculer l'effort normal critique X_c pour des conditions d'appui diverses le long des bords $y = 0$ et $y = b$.

Dans le cas où les bords $y = 0$ et $y = b$ sont libres, le voilement de la plaque ne diffère pas du flambement d'une poutre droite articulée à ses extrémités (cf article *Stabilité élastique* dans le traité Construction), donc :

$$X_c = \pi^2 \frac{D}{a^2}$$

Pour étudier les autres cas, nous cherchons une solution non nulle de l'équation (53) de la forme :

$$w(x, y) = F(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (m \text{ entier})$$

Cette solution vérifie les conditions aux limites pour $x = 0$ et $x = a$.

Si nous définissons les coefficients k^2 et k'^2 par les relations :

$$X_c = k^2 \pi^2 \frac{D}{a^2} = k'^2 \pi^2 \frac{D}{b^2} \quad \left(k'^2 = k^2 \frac{b^2}{a^2} \right) \quad (54)$$

l'équation (53) sera vérifiée si $F(y)$ est une intégrale de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$FIV - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} F'' + \frac{m^2 \pi^4}{a^4} (m^2 - k^2) F = 0$$

En observant que l'on a toujours $k^2 > m^2$, puisque la valeur critique (54) est plus grande que la valeur critique $m^2 \pi^2 D/a^2$ correspondant au cas où les bords $y = 0$ et $y = b$ sont libres, cette équation différentielle a pour intégrale générale :

$$F(y) = A \operatorname{ch} \frac{\alpha y}{a} + B \operatorname{sh} \frac{\alpha y}{a} + A' \cos \frac{\beta y}{a} + B' \sin \frac{\beta y}{a}$$

α et β étant donnés par les relations :

$$\alpha = \sqrt{m(k+m)}, \quad \beta = \sqrt{m(k-m)} \quad (55)$$

Les conditions aux limites pour $y = 0$ et $y = b$ fournissent quatre équations linéaires et homogènes pour calculer les constantes A, B, A' et B' . Ces constantes ne seront pas toutes nulles si et seulement si le déterminant de ces équations est nul; nous obtenons ainsi une équation permettant de calculer $k^2(m)$. Le coefficient k^2 qui figure dans l'expression (54) de l'effort normal critique a donc pour valeur :

$$k^2 = \min_m \{k^2(m)\} \quad (m \text{ entier})$$

Examinons les différents cas possibles.
Nous poserons, pour simplifier l'écriture :

$$\lambda = \pi b/a \quad (56)$$

4,221 Bords $y=0$ et $y=b$ simplement appuyés. — Les conditions $F(0)=0$ et $F''(0)=0$ donnent $A=0$ et $A'=0$.

Les conditions $F(b)=0$ et $F''(b)=0$ donnent les équations :

$$B \operatorname{sh} \lambda \alpha + B' \sin \lambda \beta = 0$$

$$B \alpha^2 \operatorname{sh} \lambda \alpha - B' \beta^2 \sin \lambda \beta = 0$$

Le voilement se produira si le déterminant de ces équations est nul :

$$(\alpha^2 + \beta^2) \operatorname{sh} \lambda \alpha \sin \lambda \beta = 0$$

Nous en déduisons $\lambda \beta = n\pi$; un calcul simple montre que cette condition conduit à la relation :

$$X_c = \min \left\{ \frac{\pi^2 D a^2}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \right\}$$

Il est clair que le minimum de l'expression précédente a lieu pour $n=1$.

La signification physique de ce fait est que le voilement de la plaque peut comporter plusieurs demi-ondes dans le sens de la compression, mais une seule demi-onde dans le sens perpendiculaire.

L'effort normal critique a donc pour valeur :

$$X_c = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left[m \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{1}{m} \left(\frac{a}{b} \right) \right]^2$$

l'entier m étant choisi de façon que l'expression entre crochets soit minimale ; cette expression, étant la somme de deux termes dont le produit est constant, sera minimale lorsque ces termes seront sensiblement égaux, c'est-à-dire lorsque m sera l'un des deux entiers encadrant la valeur a/b .

Nous pouvons écrire l'effort normal critique sous la forme :

$$X_c = k'^2 \pi^2 D / b^2$$

k'^2 étant un facteur numérique dépendant du rapport a/b ; la figure 18 donne les variations de k'^2 en fonction du rapport a/b ; elle montre que dès que a/b est supérieur à l'unité la valeur critique est peu différente de la valeur minimale $4\pi^2 D / b^2$.

4,222 Bords $y=0$ et $y=b$ encastés. — On trouve que k^2 est la plus petite racine positive de l'équation :

$$\operatorname{ch} \lambda \alpha \cos \lambda \beta = 1 + \frac{m^2}{\alpha \beta} \operatorname{sh} \lambda \alpha \sin \lambda \beta$$

k^2 est donc une fonction $k^2(m, b/a)$ de m et de b/a .

— Pour $m=1$, le tableau VIII donne en fonction du rapport b/a les valeurs de k^2 et de $k'^2 = k^2 b^2 / a^2$.

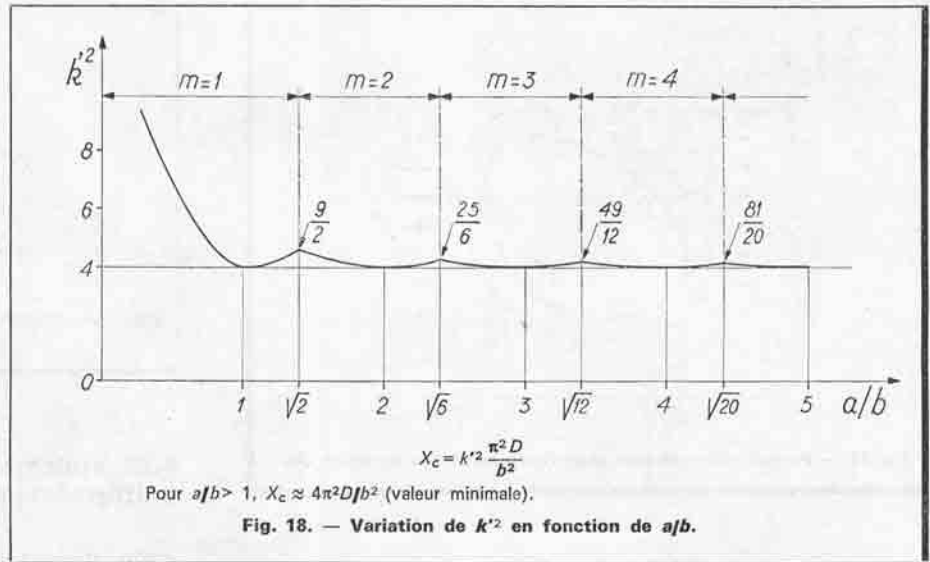


Fig. 18. — Variation de k'^2 en fonction de a/b .

Tableau VIII. — Valeurs de k^2 et k'^2 pour $m=1$, et bords $y=0$ et $y=b$ encastés.

b/a	$k^2(1, b/a)$	$k'^2(1, b/a)$	a/b	$k^2(1, b/a)$	$k'^2(1, b/a)$
0	∞	∞	0	1	∞
0,1	51 638,1	516,381	0,1	1,022 04	102,204
0,2	3 275,03	131,001	0,2	1,098 56	27,464 0
0,3	663,088	59,677 9	0,3	1,251 25	13,902 7
0,4	217,285	34,765 7	0,4	1,511 67	9,447 92
0,5	93,163 2	23,290 8	0,5	1,922 82	7,691 28
0,6	47,547 1	17,117 0	0,6	2,539 88	7,055 22
0,7	27,461 8	13,456 3	0,7	3,430 40	7,000 81
0,8	17,412 9	11,144 3	0,8	4,674 35	7,363 67
0,9	11,882 3	9,624 25	0,9	6,364 12	7,856 94
1	8,604 45	8,604 45	1	8,604 45	8,604 45

Le minimum de $k'^2(1, b/a)$, égal à 6,970 90, est obtenu pour $a/b = 0,660 83$.

— Pour $m > 1$, nous avons, en observant que l'équation donnant k^2 ne change pas lorsqu'on remplace k par ρk , m par ρm et b/a par $b/(\rho a)$:

$$k(m, b/a) = \frac{1}{\rho} k(\rho m, b/(\rho a)), \quad k'(m, b/a) = k'(\rho m, b/(\rho a))$$

donc en faisant $\rho = 1/m$:

$$k^2(m, b/a) = m^2 k^2(1, m b/a), \quad k'^2(m, b/a) = k'^2(1, m b/a) \quad (57)$$

4,223 Bord $y=0$ simplement appuyé et bord $y=b$ encasté. — On trouve que k^2 est la plus petite racine positive de l'équation :

$$\beta \operatorname{th} \lambda \alpha = \alpha \operatorname{tg} \lambda \beta$$

k^2 est donc une fonction $k^2(m, b/a)$ de m et de b/a .

— Pour $m=1$, le tableau IX donne en fonction du rapport b/a les valeurs de k^2 et de $k'^2 = k^2 b^2 / a^2$.

Le minimum de $k'^2(1, b/a)$, égal à 5,409 70, est obtenu pour $a/b = 0,795 41$.

— Pour $m > 1$, on utilise les relations (57).

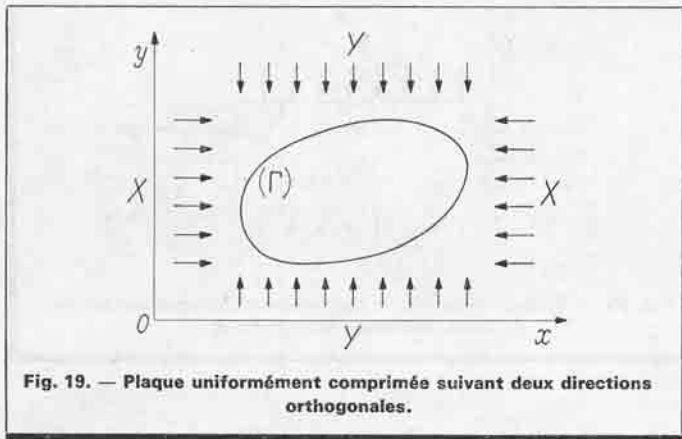


Fig. 19. — Plaque uniformément comprimée suivant deux directions orthogonales.

 Tableau IX. — Valeurs de k^2 et k'^2 pour $m=1$, bord $y=0$ simplement appuyé et bord $y=b$ encastré.

b/a	$k^2(1, b/a)$	$k'^2(1, b/a)$	a/b	$k^2(1, b/a)$	$k'^2(1, b/a)$
0	∞	∞	0	1	∞
0,1	24 638,7	246,387	0,1	1,021 04	102,104
0,2	1 584,56	63,382 3	0,2	1,089 49	27,237 3
0,3	328,171	29,535 4	0,3	1,216 40	13,515 6
0,4	110,872	17,739 5	0,4	1,417 40	8,858 76
0,5	49,340 7	12,335 2	0,5	1,713 28	6,853 14
0,6	26,273 7	9,458 53	0,6	2,130 38	5,917 71
0,7	15,889 0	7,785 63	0,7	2,700 76	5,511 75
0,8	10,568 0	6,763 52	0,8	3,462 34	5,409 91
0,9	7,565 52	6,128 07	0,9	4,458 93	5,504 85
1	5,740 21	5,740 21	1	5,740 21	5,740 21

 Tableau X. — Valeurs de k^2 et k'^2 pour $m=1$, bord $y=0$ simplement appuyé et bord $y=b$ libre ($\nu=0,25$).

b/a	$k^2(1, b/a)$	$k'^2(1, b/a)$	a/b	$k^2(1, b/a)$	$k'^2(1, b/a)$
0	∞	0,455 945	0	1	∞
0,1	46,554 0	0,465 540	0,1	1,000 55	100,055
0,2	12,359 5	0,494 380	0,2	1,011 60	25,289 9
0,3	6,029 02	0,542 612	0,3	1,032 07	11,467 5
0,4	3,815 09	0,610 414	0,4	1,061 87	6,636 60
0,5	2,791 77	0,697 943	0,5	1,100 90	4,403 60
0,6	2,236 98	0,805 313	0,6	1,149 14	3,192 07
0,7	1,903 26	0,932 595	0,7	1,206 59	2,462 43
0,8	1,687 23	1,079 83	0,8	1,273 24	1,989 44
0,9	1,539 53	1,247 02	0,9	1,349 11	1,665 56
1	1,434 18	1,434 18	1	1,434 18	1,434 18

4,224 Bord $y=0$ simplement appuyé et bord $y=b$ libre. — On trouve que k^2 est la plus petite racine positive de l'équation :

$$\beta(a^2 - \nu m^2)^2 \tanh \alpha = \alpha(\beta^2 + \nu m^2)^2 \tanh \beta$$

k^2 est donc une fonction $k^2(m, b/a)$ de m et de b/a qui dépend du coefficient de Poisson ν .

— Pour $m=1$ et $\nu=0,25$ (cas de l'acier), le tableau X donne en fonction du rapport b/a les valeurs de k^2 et de $k'^2 = k^2 b^2/a^2$.

Pour la table analytique, se reporter à la première page de cet article.

 Tableau XI. — Valeurs de k^2 et k'^2 pour $m=1$, bord $y=0$ encastré et bord $y=b$ libre ($\nu=0,25$).

b/a	$k^2(1, b/a)$	$k'^2(1, b/a)$	a/b	$k^2(1, b/a)$	$k'^2(1, b/a)$
0	∞	∞	0	1	∞
0,1	1 336,24	13,362 4	0,1	1,000 69	100,069
0,2	96,730 1	3,869 20	0,2	1,013 12	25,328 0
0,3	23,878 2	2,149 04	0,3	1,037 71	11,530 1
0,4	9,953 69	1,592 59	0,4	1,075 96	6,724 76
0,5	5,544 79	1,386 20	0,5	1,129 55	4,518 21
0,6	3,693 15	1,329 53	0,6	1,200 32	3,334 23
0,7	2,763 74	1,354 23	0,7	1,290 28	2,633 22
0,8	2,237 29	1,431 87	0,8	1,401 61	2,190 02
0,9	1,912 24	1,548 92	0,9	1,536 73	1,897 19
1	1,698 26	1,698 26	1	1,698 26	1,698 26

On peut montrer que $k'^2(1, 0) = 6(1 - \nu)/\pi^2$.

— Pour $m > 1$, on utilise les relations (57). On constate que dans ce cas le voilement est toujours obtenu pour $m=1$.

4,225 Bord $y=0$ encastré et bord $y=b$ libre. — On trouve que k^2 est la plus petite racine positive de l'équation :

$$A \cosh \alpha \cos \beta + B \sinh \alpha \sin \beta + C = 0$$

dans laquelle :

$$A = k^2 + m^2(1 - \nu)^2, \quad C = k^2 - m^2(1 - \nu)^2$$

$$B = \frac{m[k^2(1 - 2\nu) - m^2(1 - \nu)^2]}{\sqrt{k^2 - m^2}}$$

k^2 est donc une fonction $k^2(m, b/a)$ de m et de b/a qui dépend du coefficient de Poisson ν .

— Pour $m=1$ et $\nu=0,25$ (cas de l'acier), le tableau XI donne en fonction du rapport b/a les valeurs de k^2 et de $k'^2 = k^2 b^2/a^2$.

Le minimum de $k'^2(1, b/a)$, égal à 1,328 28, est obtenu pour $b/a = 0,612 115$.

— Pour $m > 1$, on utilise les relations (57).

4,3 VOILEMENT D'UNE PLAQUE UNIFORMÉMENT COMPRIMÉE SUIVANT DEUX DIRECTIONS ORTHOGONALES

4,31 Méthodes générales de calcul.

Soient X et Y les efforts normaux de compression par unité de longueur, supposés constants, suivant Ox et Oy (fig. 19). Par superposition des résultats obtenus au paragraphe 4,21, on voit que la

valeur critique γ_c telle que les efforts normaux $\gamma_c X$ et $\gamma_c Y$ provoquent le voilement de la plaque est :

$$\gamma_c = \min_{w \in \mathcal{F}} \left\{ \frac{D \iint_S w \Delta w \, dS}{\iint_S \left[X \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + Y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dS} \right\} \quad (58)$$

$\mathcal{F}$ désignant la famille des fonctions qui vérifient les conditions aux limites sur le contour de la plaque.

On peut montrer que γ_c est la plus petite valeur de γ pour laquelle l'équation :

$$D \Delta \Delta w + \gamma \left(X \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (59)$$

admet une solution non nulle vérifiant les conditions aux limites.

En prenant $X = Y = Q$, on retrouve les résultats donnés au paragraphe 4.11.

Il n'est pas exclu que l'un des efforts X ou Y soit un effort de traction. En prenant $X = -Y = -T$, on obtient le cas de la *plaque simplement cisailée* suivant les directions des bissectrices des axes. Le cas de la plaque simplement cisailée suivant les directions des axes s'en déduit par une rotation des axes d'angle $\pi/4$. On trouve ainsi pour valeur critique $T_c = \gamma_c T$ de l'effort de cisaillement par unité de longueur :

$$T_c = \min_{w \in \mathcal{F}} \left\{ \frac{D \iint_S w \Delta w \, dS}{2 \iint_S \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \, dS} \right\} \quad (60)$$

L'effort de cisaillement critique T_c est également la plus petite valeur de T pour laquelle l'équation :

$$D \Delta \Delta w + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (61)$$

admet une solution non nulle vérifiant les conditions aux limites.

Le calcul de T_c pour une plaque rectangulaire simplement cisailée peut être fait approximativement en minimisant l'expression (60) pour des fonctions w représentées par le développement limité :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N B_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Le cas de la plaque soumise simultanément à un effort de compression X suivant Ox , à un effort de compression Y suivant Oy et à un effort de cisaillement T suivant Ox et Oy s'étudie de la même façon. Le coefficient critique γ_c par lequel il faut multiplier X , Y et T pour obtenir le voilement de la plaque a pour valeur :

$$\gamma_c = \min_{w \in \mathcal{F}} \left\{ \frac{D \iint_S w \Delta w \, dS}{\iint_S \left[X \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + Y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2T \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dS} \right\}$$

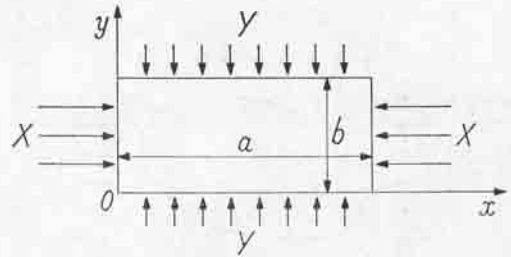


Fig. 20. — Plaque rectangulaire uniformément comprimée suivant deux directions orthogonales.

La valeur critique γ_c est la plus petite valeur de γ pour laquelle l'équation :

$$D \Delta \Delta w + \gamma \left(X \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

admet une solution non nulle vérifiant les conditions aux limites.

4.32 Voilement d'une plaque rectangulaire uniformément comprimée suivant deux directions orthogonales.

Supposons la plaque simplement appuyée soumise à l'effort de compression X suivant Ox et à l'effort de compression Y suivant Oy (fig. 20). Une déformation compatible avec les liaisons au contour est définie par :

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

L'expression (58) s'écrit alors :

$$\gamma_c = \min \pi^2 D \left\{ \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 B_{m,n}^2}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(X \frac{m^2}{a^2} + Y \frac{n^2}{b^2} \right) B_{m,n}^2} \right\}$$

Le minimum est obtenu lorsqu'un seul coefficient $B_{m,n}$ est différent de zéro :

$$\gamma_c = \min \pi^2 D \left\{ \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{X \frac{m^2}{a^2} + Y \frac{n^2}{b^2}} \right\}$$

Nous pouvons toujours supposer $X > 0$. En posant $m^2/a^2 = u$ et $n^2/b^2 = v$, les dérivées de l'expression F entre accolades sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{u+v}{(Xu+Yv)^2} \left[X \frac{m^2}{a^2} + (2Y-X) \frac{n^2}{b^2} \right] \\ \frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{u+v}{(Xu+Yv)^2} \left[Y \frac{n^2}{b^2} + (2X-Y) \frac{m^2}{a^2} \right] \end{aligned}$$

Nous en déduisons les valeurs de m et de n qui rendent γ_c minimal.

— Lorsque $Y < 1/2 X$, seule la dérivée $\partial F / \partial v$ est toujours positive ; nous devons donc prendre $n = 1$ et m égal à l'un des deux entiers les plus voisins de la valeur $m' = (a/b) \sqrt{(X-2Y)/X}$ qui annule $\partial F / \partial u$.

— Lorsque $1/2 X < Y < 2X$, les dérivées $\partial F / \partial u$ et $\partial F / \partial v$ sont toujours positives ; nous devons donc prendre $m = 1$ et $n = 1$.

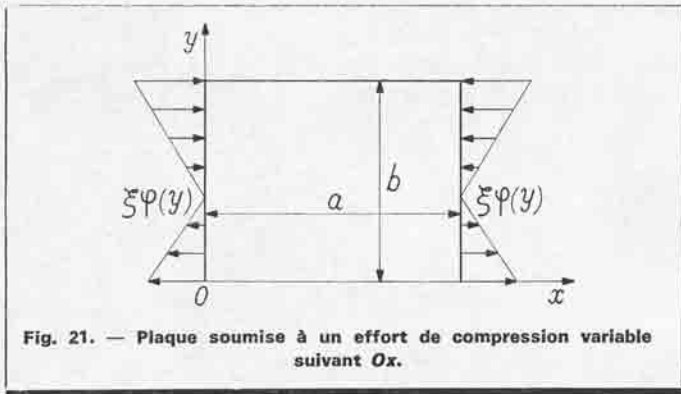


Fig. 21. — Plaque soumise à un effort de compression variable suivant Ox .

— Lorsque $Y > 2X$, seule la dérivée $\partial F / \partial u$ est toujours positive ; nous devons donc prendre $m = 1$ et n égal à l'un des deux entiers les plus voisins de la valeur $n' = (b/a) \sqrt{(Y - 2X)/Y}$ qui annule $\partial F / \partial v$.

Il est également possible de déterminer le domaine $\mathfrak{D}$ du plan OXY auquel doit appartenir le point (X, Y) pour que la plaque ne voile pas.

Ce domaine de sécurité $\mathfrak{D}$ est l'intersection des domaines $\mathfrak{D}_{m,n}$ définis par :

$$X \frac{m^2}{a^2} + Y \frac{n^2}{b^2} - \pi^2 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 < 0$$

Le domaine $\mathfrak{D}$ est donc un domaine convexe limité par des segments de droite.

Remarque : on pourrait, comme au paragraphe 4.22, étudier le cas où la plaque est simplement appuyée le long des bords $x = 0$ et $x = a$, encastree, simplement appuyée ou libre le long des bords $y = 0$ et $y = b$.

4.4 VOILEMENT D'UNE PLAQUE SOUMISE A UN EFFORT DE COMPRESSION VARIABLE DIRIGÉ SUIVANT Ox

Nous supposons que la plaque supporte un effort normal X dans la direction Ox fonction de y :

$$X = \xi \varphi(y)$$

Le travail $\bar{w}$ des forces extérieures a pour valeur :

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \xi \int_0^b \varphi(y) dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \xi \iint_S \varphi(y) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dS$$

La méthode de l'énergie (§ 1.5) nous donne pour volume critique ξ_c :

$$\xi_c = \min_{w \in \mathfrak{F}} \left\{ \frac{D \iint_S w \Delta w dS}{\iint_S \varphi(y) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dS} \right\} \quad (62)$$

$\mathfrak{F}$ désignant la famille des fonctions w qui vérifient les conditions aux limites sur le contour de la plaque.

Il est possible de montrer que la valeur critique ξ_c est la plus petite valeur de ξ pour laquelle l'équation :

$$D \Delta w + \xi \varphi(y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (63)$$

admet une solution non nulle vérifiant les conditions aux limites.

La méthode de l'énergie a permis d'étudier le voilement d'une plaque rectangulaire simplement appuyée comprimée et fléchie (fig. 21). Dans ce cas, l'effort de compression X supporté par la plaque est :

$$X = \xi \left(1 - \beta + \beta \frac{y}{b} \right)$$

La section totale de la plaque, de hauteur b , supporte alors un effort normal N et un moment fléchissant M :

$$N = \left(1 - \frac{1}{2} \beta \right) b \xi, \quad M = \frac{1}{12} \beta b^2 \xi$$

La valeur $\beta = 0$ correspond à la compression simple, et la valeur $\beta = 2$ à la flexion simple.

Inversement, étant donné M et N , nous trouvons :

$$\beta = \frac{12 M}{6 M + N b}, \quad \xi = \frac{6 M + N b}{b^2}$$

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

- NADAI (A.). — *Elastische Platten*. 1925 Springer-Verlag.
TIMOSHENKO (S.) et WOINOWSKY-KRIEGER (S.). — *Théorie des plaques et des coques*. 1961 Béranger.
PIGEAUD (G.). — *Résistance des matériaux*. 1928 Gauthier-Villars.
COURBON (J.). — *Résistance des matériaux*. Tome I 1971 Dunod.
PUCHER (A.). — *Einflussfelder elastischer Platten*. 1958 Springer-Verlag.
BARES (R.). — *Tables pour le calcul des dalles et des parois*. 1971 Dunod.
COURBON (J.). — *Plaques minces élastiques*. 1980 Eyrolles.



1. The plaintext is converted into a numerical form.

The ciphertext is then converted back into a numerical form.

2. The numerical form is then converted into a binary form.

The binary form is then converted back into a numerical form.

3. The numerical form is then converted into a decimal form.

The decimal form is then converted back into a numerical form.

4. The numerical form is then converted into a hexadecimal form.

The hexadecimal form is then converted back into a numerical form.

5. The numerical form is then converted into a base-64 form.

The base-64 form is then converted back into a numerical form.

6. The numerical form is then converted into a base-16 form.

The base-16 form is then converted back into a numerical form.

7. The numerical form is then converted into a base-10 form.

The base-10 form is then converted back into a numerical form.

8. The numerical form is then converted into a base-2 form.

The base-2 form is then converted back into a numerical form.

9. The numerical form is then converted into a base-1 form.

The base-1 form is then converted back into a numerical form.